振动分析的有限元法

〔日〕户川隼人 著　殷荫龙 陈学源 译　程季达 校

地震出版社

振动分析的有限元法

〔日〕户川隼人　著

殷荫龙　陈学源　译

程季达　校

地震出版社

1985

内 容 提 要

本书系统地介绍了振动分析的有限元法，着重阐述了动力有限元方程的各种数值解法。第一章介绍有限元方程的建立，第二章介绍振动仿真的四种方法，第三章介绍振型分解法，第四章详细介绍特征值的各种计算方法。书中给出了各主要方法的计算机程序，并详细分析了这些程序的编制方法。

本书可作为土建、机械专业的工程技术人员、工程软件编制人员以及大专院校有关专业师生、研究生的参考书。

有限要素法による振动解析

户川隼人　著

サイエンス　社

振动分析的有限元法

〔日〕户川隼人　著

殷荫龙　陈学源　译

程季达　校

责任编辑：蒋乃芳

*

[illegible]社 出版

北京复兴路63号

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

*

850×1168　1/32　　6.625印张　　171千字

1985年5月北京第一版　　1985年5月北京第一次印刷

印数 0001—3,700

统一书号：13180·255　　定价：1.90元

译者的话

户川隼人是日本大学理工学部教授。他在早稻田大学毕业后，一直从事数值分析与计算技术、有限元法、振动分析等方面的研究。原书自1975年在日本出版以来十分畅销，每年均重印出版。我们是根据1978年本翻译的。

本书把力学原理、数值方法和计算机程序编制技巧融合在一起，写法新颖，深入浅出。它不仅提供计算机程序，而且详细分析程序的编制过程。这对于工程应用软件工作者，对于学习和使用计算机程序的广大科技人员都会有很大帮助。

书中第二章详细介绍振动分析计算机仿真的各种方法。所谓"仿真"(*Simulation*)就是用模型代替实际系统进行实验和研究。计算机仿真就是在计算机上进行数值实验。仿真技术随着计算机的飞速发展而愈益普及。本书介绍了振动分析仿真技术最常用和最有效的方法。第四章详尽阐述了振动分析的重要数学工具——特征值问题，并总结了作者独创的研究成果。像MCK型特征值问题、复矩阵的特征值问题、MK型问题中矩阵的五重对角线化、MCK型问题中矩阵的七重对角线化等内容，都是有关书籍中少见的。

书中附有十多个子程序，是进行振动分析的有力工具，有较大实用价值。

我们对原书中已发现的错误之处均作了改正，并加译注。由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，尚希读者指正。

译者

1983.10

前　　言

本书具有以下三重特征：它是用有限元法进行振动分析的入门书；论述振动分析计算方法的专门书；详述广义特征值问题的数学书。

所谓入门书，可以说本书是拙著《有限元法入门》的续篇，并假定读者已了解静力问题的分析方法，这里对动力问题从基本方程的建立到解法作一简明的叙述。为了方便读者，书中给出多个子程序作为分析工具。

作为专门书，它介绍近年来得到显著发展的在这个领域内的最新成果——高效率且便于使用的各种计算方法，并加上著者独创的研究成果。特别是第四章所述的方法，多数是原来教科书几乎完全没有载入的新技术。无疑，它对实际计算工作将大有用处。

另一方面，作为数学书，它整理了在矩阵论专著中至今还没有充分论述的"广义特征值问题"的基本性质，并使之系统化。由于在专门的矩阵论中也找不到对广义特征值问题阐述得如此详尽的书籍，因此可以认为，本书第三章有一定的学术价值。

当然，不能说本书内容全部是著者的独创。第一章对振动问题的公式主要参考了R. W. Clough的著作。第二章和第四章叙述的新方法主要根据Clough和其合作者（E. L. Wilson，K. J. Bathe等）所研究的成果。而第三章的理论大部分参考E. C. Pestel，F. A. Leckie的教程《弹性力学的矩阵方法》（McGraw-Hill，1963），另外还参考了东京大学的山本善之、川井忠彦、柴田碧、大坪英臣，京都大学的山田善一等先生的著作、论文、讲习会的教材，§4.6中的算法摘自K. K. Gupta，W. H. Wittrick，F. W. Williams等的著作。

此外，§4.5的全部（五重对角化），§4.9的一部分(一般论述部分）和第二章中关于直接解法的若干算法是著者提出的，且多数的数学证明都是在编写本书过程中由作者自己推导的。

（下略）

户川隼人

1975年10月

目　　录

第一章　振动机构的数学模型

单自由度系统的振动可用下面微分方程描述：

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f.$$

同样，多自由度系统的振动可用下面矩阵形式的微分方程描述：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}.$$

本章介绍振动研究的基本方法并说明建立 M，C，K，f 的具体作法。

§1.1　什么是振动

振动是一种往复运动现象。

例如：船的摇摆、汽车的颠簸、树枝的摆动、火焰的跳动、玻璃杯中水的晃动、大地的震动（地震）等。也有更快更微的振动现象，例如吉他琴弦的振动、庙宇里吊钟的振动、喉内声带的振动等。还有非机械的振动，例如电磁振荡、自动控制系统的振动等。更广义地说，经济景气的变化、各种思想波动似乎也是一种振动。

振动学的任务是研究这些振动现象的共同性质、振动的起因、振动的规律等。

术语解释

振动的幅度叫**振幅**。通常，在数量上用摆动幅度的二分之一(由中心到最大偏离点的距离)表示振幅。

往复一次所需要的时间称**周期**。单位时间往复的次数称**频率**。两者之间有如下关系：

$$频率=1/周期.$$

为了更详细地研究振动的状态，可以绘制振动物理量(位置、转角等）与时间的关系图，它是一波状曲线，称为**波形**。另一方

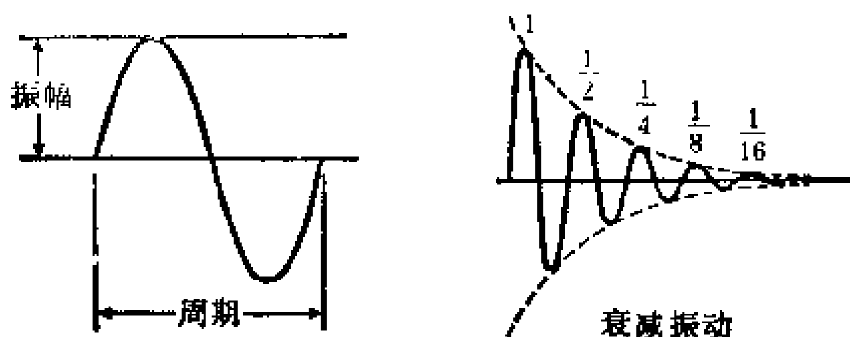


图 1.1 术语解释

面，像弦振动之类的情况也可以绘制振动物理量和空间位置的关系图，通常也称波形．为区别起见，本书把后者称作振型。

振幅、周期、相位不随时间变化的振动称**定常振动**，否则称**非定常振动**。不管是否定常振动，具有一定规律的振动叫**规则振动**，完全没有规律的振动叫**不规则振动**。

以上定义是原则性的，实际上对各种不同的情况可作灵活的解释，例如，对于具有各种混合波形的振动，将其分解之后仍可使用上述定义。

振幅随着时间的增长而逐渐变小的振动叫**衰减振动**．单位时间或每周期里振幅的减小率称**衰减率**。

系的概念

本书常用**系**这个术语。当某些相关的事物集合在一起相互作用时，这一组事物叫系或系统（*System*）。当我们用数学方法来研究自然现象时，首先建立描述这现象机理的数学模型，然后用数学方法研究这模型，建立数学模型所涉及的范围叫系。也可以使用抽象的模型来代替这一数学模型，则这抽象模型本身就是系。

内部具有引起振动（或至少使振动持续）机理的系叫**自激振动系**。本书主要研究自激振动系。

§ 1.2 弹性振动的基本方程

本书不论述一般的振动理论，而只研究弹性体的微振动。其

理由如下：第一，这对有一定力学基础的人来说容易接受；第二，它在实用上很重要；第三，这样就可以和著者以前发表的《有限元法入门》（以后简称《入门》）一书衔接起来。

质点-弹簧系的自由振动

在刚度为 k 的弹簧上悬挂质量为 m 的重物。然后在弹簧弹力与重物重力相平衡的位置轻轻地把手放开，则重物在原处静止不动，这个位置称**静平衡点**。若手从静平衡点以外的位置离开，则重物开始振动。

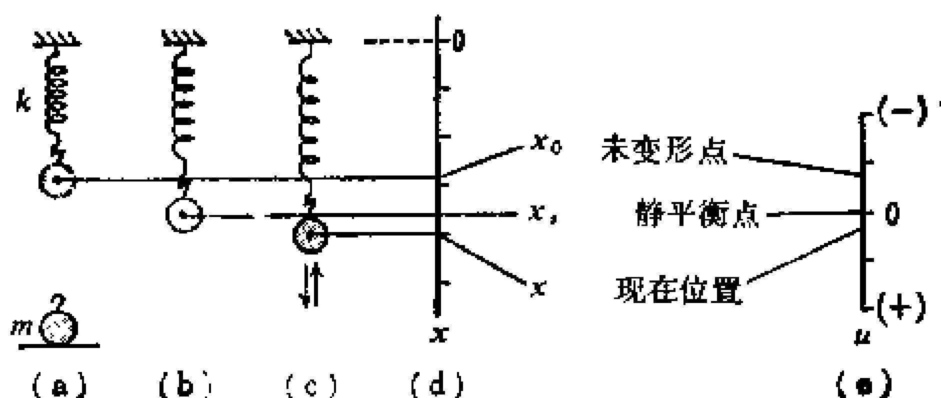


图 1.2 最简单的弹性振动例子

以后将重物抽象地称为质点，其全部质量集中在重心处。一般按以下几种方法描述振动状态。一种方法是用图 1.2(d)所示的整体坐标来表示质点的位置，用 $x(t)$ 表示位置 x 和时间 t 的关系。另一方法如图 1.2(e)所示，用离开静平衡点的位移 u 来描述振动状态。u 和 x 有简单关系：

$$u = x - x_s. \tag{1}$$

因为用 u 比用 x 方便得多，本书主要采用这一方法。另外还可采用离开**未变形点**[1]的位移 $\bar{u} = x - x_0$ 来表示质点的位置，这虽与上法类似，但因坐标原点不同则方程式也不相同，这一点应予注意。

确定了描述振动现象的变量之后，下一步工作是建立基本方

1) 本书把弹簧伸长(或缩短)为 0 的点称作未变形点。

程式。通常采用以下三种推导方法。

1) **按牛顿第二定律推导**

牛顿第二定律是从"物体在力的作用下将怎样运动"这一观点来描述运动规律的，即"物体受力作用，速度将发生改变，速度的变化率（即加速度）与力成正比，其比例常数为物体的质量"。用公式表示为

$$(\text{质量})\times(\text{加速度})=\text{力}. \tag{2}$$

若与

$$\frac{d}{dt}(\text{位置})=\text{速度}, \qquad \frac{d}{dt}(\text{速度})=\text{加速度} \tag{3}$$

联合，则位置和时间的关系就可完全确定。

式(2)右边的"力"不包括惯性力。所谓惯性力是一种"形式上的力"。因为按牛顿力学的观点，惯性力本来就不是真实的力。

在多于两个力的力系作用下，式(2)的"力"是指该力系的合力，或称不平衡力。若力系平衡，则速度不变；若力系不平衡，则速度的变化与不平衡力的大小成正比。

现在考虑质点受弹簧弹性力 f_e 和重力 f_g 作用的情况。根据胡克定律有

$$f_e=-k(x-x_0), \tag{4}$$

重力(以铅直向下为正)为

$$f_g=mg, \tag{5}$$

式中，g 是重力加速度，约为 980 厘米/秒^2。按牛顿第二定律有

$$m\ddot{x}=-k(x-x_0)+mg. \tag{6}$$

在静平衡位置

$$-k(x_s-x_0)+mg=0,$$

式(6)变为

$$m\ddot{x}=-k(x-x_s).$$

若采用式(1)，上式可改写为

$$m\ddot{u}=-ku. \tag{7}$$

移项后也可写成

$$m\ddot{u}+ku=0. \tag{7'}$$

可见，若采用离开静平衡点的距离 u 作为变量，可以得到较简单的表达式，在方程中不出现与质点位置无关的力。

2) 按达朗贝尔原理推导

在有限元法中，静力学问题可表示为

$$K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}. \tag{8}$$

上式左边代表弹性力[1]，右边代表外力，即非弹性力。式 (8)表示两者平衡，这是静力平衡条件。

达朗贝尔定义惯性力为

$$\text{惯性力}=-(\text{质量})\times(\text{加速度}), \tag{9}$$

并把它当作施加于物体的一种力看待，于是动力学的基本方程就可以写成静力平衡方程的形式，这就是达朗贝尔原理。

于是，前述问题可写成

$$k(x-x_0)=mg-m\ddot{x}. \tag{10}$$

作类似式 (6)的变换有

$$ku=-m\ddot{u},$$

或

$$m\ddot{u}+ku=0.$$

这与式(7)、(7′)相同。

3) 按哈密尔顿原理推导[2]

哈密尔顿原理是牛顿第二定律的变分形式。对于从时刻 t_1 到 t_2 的运动过程有

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt=0, \tag{11}$$

式中，T 是动能；U 是势能（若用《入门》所述的全势能概念，可

---

1) 正确地说，弹性力为 $\boldsymbol{f}_e=-K\boldsymbol{u}$，将它代入下式

$$(\text{弹性力})+(\text{弹性力以外的力})=0,$$

移项后得到式 (8)，所以式 (8) 右边力的符号按常规取法（即指向坐标轴正方向的力为正）。

2) 初学者可暂不读本条。关于变分原理的术语和研究方法可参阅《入门》§ 3.3。

以处理更广泛的问题)。对前述问题有

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

$$U=\frac{k}{2}(x-x_0)^2+mg\,(x_{基}-x).$$

U式右边第一项是弹簧变形能，第二项是势能，$x_{基}$是势能的基准点。特别地，若取

$$x_{基}=(x_0+x_s)/2,$$

则

$$T=\frac{1}{2}m\dot{u}^2,$$

$$U=\frac{k}{2}u^2. \tag{12}$$

于是基本方程为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}m\dot{u}^2-\frac{k}{2}u^2\right)dt=0. \tag{13}$$

相应于这个变分问题的欧拉方程为

$$m\ddot{u}+ku=0. \tag{14}$$

初始条件为

$$当\ t=t_1\ 和\ t=t_2\ 时,\ \dot{u}=0. \tag{15}$$

关于式（14）和（15）的推导见《入门》第114页。

上述三种方法本质相同，本书采用方法2）。令

$$力的总和=0 \tag{16}$$

建立基本方程。这里的力，包括式（19）所定义的惯性力。

强迫振动和有阻尼振动

研究图1.2（a）的系统，设该系统除受上述的力作用外还受到力f的作用。这时基本方程为

$$(惯性力)+(弹性力)+(重力)+f=0. \tag{17}$$

以x为变量可将上式写成

$$-m\ddot{x}-k\,(x-x_0)+mg+f=0. \tag{18}$$

如用离静平衡点 x_s 的位移 $u=x-x_s$ 置换 x，则方程变为

$$-m\ddot{u}-ku+f=0, \tag{19}$$

即

$$m\ddot{u}+ku=f. \tag{20}$$

从上式推导过程可看出，式（20）中 f 的符号与正规的取法一致（指向坐标轴正向的力为正）。

不管 f 是什么力，式（18）、（19）、（20）都成立，所以它们是普遍方程式。虽然可按后述的数值解法直接求解，但为了更好地把握在各种力作用下振动的特点，先研究几种重要情况。

一般地，f 为 t，x（或 u）和它们的导数（$\dot{x}$，$\ddot{x}\cdots$ 或 $\dot{u}$，$\ddot{u}\cdots$）的函数，但并不一定总是包含所有这些变量。现分以下几种情况研究。

1）f 为常数；

2）f 只是位置的函数；

3）f 只是速度的函数；

4）f 只是时间的函数；

5） 其他。

当 f 为常数时，设静力问题

$$k(x-x_0)+mg+f=0 \tag{21}$$

的解（即静平衡点位置）为 x_s，定义动位移 $u_d=x-x_s$，得到与式（7′）相同的运动方程

$$m\ddot{u}_d+ku_d=0. \tag{22}$$

一般地，当

$$f=(\text{静力})+(\text{动力})$$

时，也可用这方法将静力成分从方程式中除去。

其次，当 $f=f(x)$ 时，可分以下两种情况：

2.1） $f(x)$ 为一次式；

2.2） $f(x)$ 不是一次式。

当 f（x）为一次式时，可写成如下形式：

$$f(x)=a(x-x_0)+b. \tag{23}$$

代入式（18）整理后得

$$-m\ddot{x}-(k-a)(x-x_0)+mg+b=0.$$

令静力问题

$$-(k-a)(x-x_0)+mg+b=0. \tag{24}$$

的解为 $x=x_s$，定义动位移 $u_d=x-x_s$，则运动方程可写为

$$m\ddot{u}_d+(k-a)u_d=0. \tag{25}$$

于是，可按折算弹簧常数为（$k-a$）的自由振动问题处理。

当 $f(x)$ 不是一次式（也不是 0 次式）时变成非线性振动。它的情况与线性振动完全不同。虽然也可采用以后介绍的数值解法来分析，但本书避免涉及非线性振动问题，只好割爱。

当 f 只是 $\dot{x}$ 的函数时，一般令 $f(\dot{x})$ 与 $\dot{x}$ 反号，即 $\dot{x}f<0$，由于它使振动衰减，故称为**阻尼力**。若取 f 和 $\dot{x}$ 同号，它将使振动增大，故称**负阻尼力**，不过这是相当特殊的情况。

由流体的粘性、摩擦、弹性体内部的性质所引起的阻力是阻尼力的具体例子。严格说来，在许多情况下阻尼力并非一次式，但通常可近似地看作一次式。因为阻尼力的影响是次要的，即使有些出入也无妨。将阻尼力表示为一次式后，计算将非常简单，而按非线性处理就要麻烦得多。设

$$f(\dot{x})=-c\dot{x}, \quad (c>0)$$

因 $\dot{x}=\dot{u}$，有

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0. \tag{26}$$

这就是有阻尼自由振动方程。

最后研究 f 只是 t 的函数的情况。

$$m\ddot{u}+ku=f(t) \tag{27}$$

是强迫振动最基本的形式，若再加上静力、式（23）形式的力、阻尼力等，就得到更为普遍的方程式：

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f(t), \tag{28}$$

式中，u 是离开静平衡点的位移，k 为折算弹簧系数[参考式(25)]。

至于更复杂的形式，本书不作研究。

§ 1.3 振动方程的矩阵形式

以上介绍了单自由度系统的基本公式，现在转向多自由度问题。其[illegible]举例了如图 1.3 所示。假设读者对有限元法的静力问题已有一定的基础，本书将简明地完成以后的叙述。

基本方程的建立

静力问题的矩阵形式为

$$Ku=f. \tag{29}$$

式中，K是刚度矩阵；u是广义位移向量；f是广义荷载向量。按达朗贝尔原理，在f中加入惯性力（也可再加上阻尼力、激振力等动力）就得到动力问题的基本方程。

首先研究惯性力，由式（9）应有

$$f_{惯}=\begin{bmatrix} -m_1\ddot{u}_1 \\ -m_2\ddot{u}_2 \\ \vdots \\ -m_n\ddot{u}_n \end{bmatrix}. \tag{30}$$

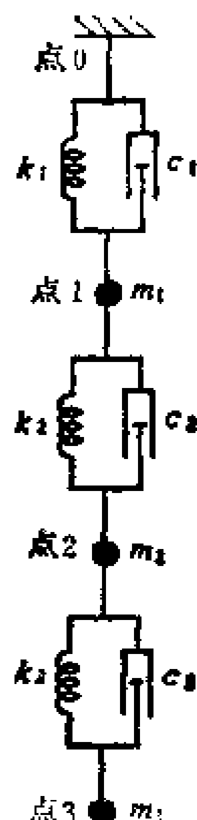


图 1.3 多自由度系统简例

通常定义

$$M=\begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}, \quad \ddot{u}=\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix}. \tag{31}$$

式(30)可写成

$$f_{惯}=-M\ddot{u}. \tag{32}$$

M称质量矩阵。于是多自由度线性系统的自由振动方程为

$$Ku=-M\ddot{u},$$

即

$$M\ddot{u}+Ku=0. \tag{33}$$

此式与单自由度问题式（7′）的形式相同，且是式（7′）的自然扩展。

其次研究阻尼力。若采用§1.2所述的线性模型，则阻尼力是关于 $\dot{u}$ 各分量的一次式，可写为

$$f_{阻}=-\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix}=-C\dot{u}. \tag{34}$$

式中 C 称**阻尼矩阵**。于是，有阻尼振动方程为

$$Ku=-M\ddot{u}-C\dot{u}.$$

即

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0. \tag{35}$$

此式与式（26）形式相同。强迫振动方程可写为

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=f(t). \tag{36}$$

此外，当有以下形式的力作用时（A 为常数矩阵，b 为常向量）

$$Au+b,$$

振动方程为

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=f(t)+Au+b.$$

移项后得

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+(K-A)u=f(t)+b. \tag{37}$$

设静力平衡方程

$$(K-A)u=b \tag{38}$$

的解为 $u=u_s$，定义动位移为

$$u_d=u-u_s,$$

则式（37）与式（23）一样可改写为

$$M\ddot{u}_d+C\dot{u}_d+(K-A)u_d=f(t). \tag{39}$$

若把 $(K-A)$ 看作“折算刚度矩阵”且仍用 K 表示，则所得公式与式

36）完全相同。

因此，本书以后研究式（36）类型的问题［包括式（33），（35）］，若不事先说明，则M，C，K为常数矩阵。

例 1.1　对图 1.3 所示问题，先考虑包含 0 点的情况，质量矩阵为

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \tag{40}$$

将单元阻尼矩阵

$$C_i=\begin{bmatrix} c_i & -c_i \\ -c_i & c_i \end{bmatrix} \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

迭加后得到结构阻尼矩阵

$$C=\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

将单元刚度矩阵

$$K_i=\begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix} \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

迭加后得到结构刚度矩阵

$$K=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}.$$

因为 0 点是固定的，实际计算时去掉上述矩阵第一行第一列，然后解下列方程。

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}
+
$$

$$
+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{42}
$$

程序1.1给出了建立这种M, C, K矩阵的过程。

程序 1.1　建立一维问题 M, C, K 矩阵的程序

用卡片输入各元素的质量、阻尼系数、刚度（弹簧系数）、初位移、初速度、约束条件之后，建立 M, C, K。质量矩阵用 L M 法（后述）建立。

```
      SUBROUTINE MCK1D(M,C,K,U,V,N,NN)
      REAL M,K,MM,KK
      DIMENSION M(NN,NN),C(NN,NN),K(NN,NN),KOMENT(15),
     1 U(NN), V(NN)
C
      DO 1 I=1,NN
      U(I)=0.0
      V(I)=0.0
      DO 1 J=1,NN
      M(I,J)=0.0
      C(I,J)=0.0
      K(I,J)=0.0
    1 CONTINUE
C
      NNM1=NN-1
```

```
      DO 2 I=1,NNM1
      J=I+1
      READ(5,3)  MM,CC,KK,U(I),V(I),IF
    3 FORMAT(3F10.5,2F10.5,I10)
      IF(MM.LE.0.0)  IF(IF) 5,6,7
      M(I,I)=M(I,I)+MM*0.5
      M(J,J)=M(J,J)+MM*0.5
      C(I,I)=C(I,I)+CC
      C(I,J)=C(I,J)-CC
      C(J,J)=C(J,J)+CC
      K(I,I)=K(I,I)+KK
      K(I,J)=K(I,J)-KK
      K(J,J)=K(J,J)+KK
      C(J,I)=C(I,J)
      K(J,I)=K(I,J)
    2 CONTINUE
C  FREE-FREE
    5 N=I
      RETURN
C  FREE-CLAMP
    6 N=I-1
      RETURN
C  CLAMP-CLAMP
    7 N=I-1
      C(1,2)=0.0
      C(2,1)=0.0
      K(1,2)=0.0
      K(2,1)=0.0
      RETURN
      END
```

§ 1.4　建立质量矩阵的方法

对于只有集中质量的结构，建立质量矩阵的方法与前述相

同，即可把各结点的质量排列在对角线上。

对于二维（三维）问题，因为在 x，y（z）方向与惯性力相应的质量相同，所以排列在对角上的质量值每两个（或每三个）是相同的。例如

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & & & \\ & m_1 & & & & & \\ & & m_2 & & & & \\ & & & m_2 & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \end{bmatrix}.$$

在框架分析中以结点转角为变量时，应该用转动惯量代替质量，其处理方式与质量相同，即在对角线上相应于转角的位置写转动惯量值。

分布质量的处理方法

对于具有分布质量的结构，建立质量矩阵有两种方法：一是换算为集中质量建立质量矩阵；一是按能量原理建立质量矩阵，这两种方法各有优缺点。本书称前者为 LM 法、后者为 CM 法。

LM 法

处理分布质量最简单的方法是按某种原则将分布质量换算成等价的集中质量，然后按处理集中质量的方法建立质量矩阵。按这方法建立的质量矩阵叫堆聚质量矩阵。这方法简称 LM 法

图 1.4 区域分割

有许多方法可把分布质量换算为集中质量。当质量均匀分布时，最简单的办法是将质量平均分配给单元各结点。如果质量分布不均匀，较简便的方法是先规定各结点所分担的区域（如图 1.4 所示）。然后把各区域的质量分配给各结点。

用 LM 法建立质量矩阵与集中质量情况相同，可写成对角线形式。因此，用计算机计算时可按一维数组存贮，这对于求逆矩阵和进行乔莱斯基（Choleski）分解都很方便。其精度虽不及 CM 法，但对各种情况都很简便。

CM 法

LM 法是从“把连续分布质量换算为集中质量”这一角度考虑问题。CM 法是从另一角度考虑问题，研究“以

$$f_{惯} = M\ddot{u} \tag{43}$$

表示惯性力时，M应具有怎样的形式”。其具体方法说明如下。

1）用建立刚度矩阵所使用的形函数近似表达单元内各点的位移，

2）由于位移对时间的二阶导数就是单元内各点的加速度，故可用建立刚度矩阵所采用的同样的插值函数进行加速度插值，

3）按加速度的分布求惯性力的分布，然后将这些惯性力换算成等价的结点荷载，并汇集成式（43）的形式，这就是质量矩阵 M

关于换算为等价结点荷载的方法，最简单的是由结点所分担区域的大小来计算（图 1.4）。不过原则上应根据能量原理（最小势能原理）按变分法计算，且在外力虚功项内包含惯性力的虚功：

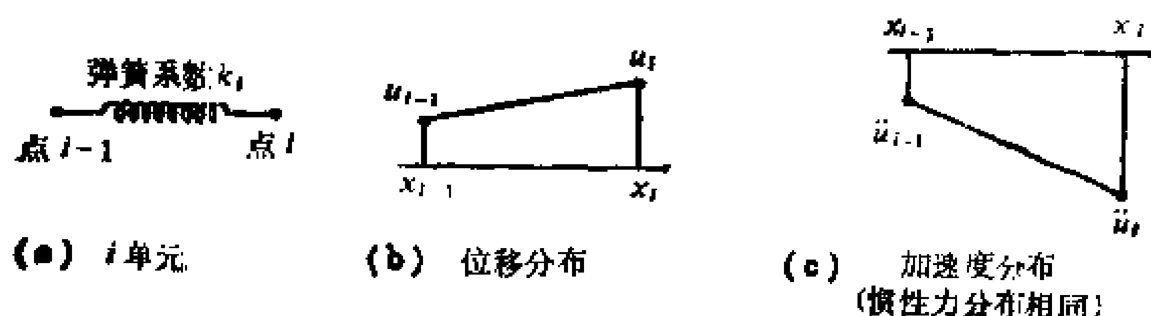
$$惯性力的虚功 = \iiint (惯性力) \times (位移)\, dx\, dy\, dz$$

（具体步骤可参阅例题）。

这样建立的质量矩阵称一致质量矩阵，简称 CM 矩阵。

例 1.2　在一维弹簧系的振动分析中，试研究计及弹簧质量的情况

首先，研究第 i 单元，采用图 1.5 的符号，假定单元内位移按线性变化（事实上均质弹簧是按线性变化的）。根据拉格朗日插值公式（参考 p. 55 注），位移为



(a) i 单元　(b) 位移分布　(c) 加速度分布（惯性力分布相同）

图 1.5 分布质量的处理方法

$$u(x)=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}u_i+\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}u_{i-1}, \tag{44}$$

加速度为

$$\ddot{u}(x)=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\ddot{u}_i+\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\ddot{u}_{i-1}. \tag{45}$$

设弹簧质量线密度为 ρ_i，则分布荷载的荷载密度为 $-\rho_i\ddot{u}(x)$[1]。按《入门》第三章所述要点求该单元的总势能函数：

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2}(\text{轴力})\times(\text{伸长})-\int_i(\text{惯性力})\times(\text{位移})dx\\ &= \frac{1}{2}k_i(u_i-u_{i-1})^2dx+\int_i\rho_i\ddot{u}(x)u(x)dx\\ &= \frac{1}{2}[u_{i-1}\quad u_i]\begin{bmatrix}k_i & -k_i\\ -k_i & k_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i-1}\\ u_i\end{bmatrix}+\\ &\quad+[\ddot{u}_{i-1}\quad \ddot{u}_i]\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i-1}\\ u_i\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{46}$$

这里，

1) 惯性力与加速度的符号相反。

$$\int_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i},$$

以下相同。又

$$m_{11} = \rho_i \int_i \left(\frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 dx = \rho_i \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{(-1)^2} l_i ds = \frac{\rho_i l_i}{3},$$

$$m_{12} = m_{21} = \rho_i \int_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} dx$$

$$= \rho_i \int_0^1 \frac{s(s-1)}{-1} l_i ds = \frac{\rho_i l_i}{6},$$

$$m_{22} = \rho_i \int_i \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 dx = \rho_i \int_0^1 s^2 l_i ds = \frac{\rho_i l_i}{3}.$$

上式中，

$$l_i = x_i - x_{i-1};$$

$$s = (x - x_{i-1})/l_i.$$

因此有

$$dx = l_i ds.$$

现在要求势能函数 Π 最小时的 u_{i-1} 和 u_i，为此，解联立方程：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{i-1}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0.$$

这联立方程可写成

$$\begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{i-1} \\ \ddot{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

上式第二项的系数矩阵就是**单元质量矩阵**，把所有单元质量矩阵

"迭加"起来就得到整个结构的整体质量矩阵，其迭加要点与刚度矩阵相同。例如，对于 $\rho=1$、$l=1$ 的三个串连弹簧，由于其单元质量矩阵（各单元均相同）为

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix},$$

则整体质量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

以上是由CM法求得的。若用LM法，单元质量矩阵为

$$\begin{bmatrix} \rho l/2 & 0 \\ 0 & \rho l/2 \end{bmatrix}.$$

把各单元质量矩阵"迭加"得整体质量矩阵。对于上例，单元质量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

整体质量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

若除弹簧质量外还有如图1.2和图1.3那样的集中质量，则可在所求得的分布质量矩阵上迭加上集中质量矩阵

$$
\begin{bmatrix}
m_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & m_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & m_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & m_n
\end{bmatrix}. \tag{48}
$$

这里，作为第一个例题，我们详细地写出总势能的完全形式来求解M矩阵，从整个过程可以明显看出，若只需建立质量矩阵，则没有必要写出总势能的所有项，而只需考虑总势能的惯性项。它可表示为以下形式：

$$
[\text{结点加速度向量}]\begin{bmatrix} \\ & M & \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{结}\\\text{点}\\\text{位}\\\text{移}\\\text{向}\\\text{量}\end{bmatrix}. \tag{49}
$$

式中的M便是质量矩阵。以后使用这一方法。

例 1.3　试建立图 1.4 所示三角形单元的单元质量矩阵。单元内部位移可近似地用一次式表示[1]。例如（参见《入门》第二章）

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \\
v(x,y) &= \alpha_{20} + \alpha_{21}x + \alpha_{22}y.
\end{aligned} \tag{50}
$$

但这不便于以后的计算。因此采用插值函数代替，可设[2]

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= u_i p(x,y) + u_j q(x,y) + u_k r(x,y), \\
v(x,y) &= v_i p(x,y) + v_j q(x,y) + v_k r(x,y).
\end{aligned} \tag{51}
$$

式中，

$p(x,y)$是在结点 i 为1，在结点 j 和 k 为 0 的一次式；

1）式中 v 表示位移在 y 方向的分量，注意 v 不是速度。以下相同。

2）例 1.1 的做法实质上与此式相同，即

$$
\begin{aligned}
& u(x) = u_{i-1}p(x) + u_i q(x), \\
& p(x) = (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}), \\
& q(x) = (x - x_i)/(x_{i-1} - x_i), \\
& m_{11} = \int_i \{p(x)\}^2 dx, \quad m_{12} = \int_i p(x)q(x)dx \text{ 等。}
\end{aligned}
$$

$q(x,y)$是在结点 j 为1，在结点 k 和 i 为0的一次式；

$r(x,y)$是在结点 k 为1，在结点 i 和 j 为0的一次式。

若设它们分别为：

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= p_0 + p_1 x + p_2 y, \\
q(x,y) &= q_0 + q_1 x + q_2 y, \\
r(x,y) &= r_0 + r_1 x + r_2 y.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

由于有

$$
\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{bmatrix}^{-1}
$$

$$
= \frac{1}{\Delta}
\begin{bmatrix}
x_j y_k - x_k y_j & y_j - y_k & x_k - x_j \\
x_k y_i - x_i y_k & y_k - y_i & x_i - x_k \\
x_i y_j - x_j y_i & y_i - y_j & x_j - x_i
\end{bmatrix}.
\tag{53}
$$

式中，

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}.
\tag{54}
$$

于是，单元内的加速度分布（假定为一次式）也可用相同的形式表示，即

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}(x,y) &= \ddot{u}_i p(x,y) + \ddot{u}_j q(x,y) + \ddot{u}_k r(x,y), \\
\ddot{v}(x,y) &= \ddot{v}_i p(x,y) + \ddot{v}_j q(x,y) + \ddot{v}_k r(x,y).
\end{aligned}
\tag{55}
$$

设单元质量密度为 ρ（在单元内是常数），因为由惯性力引起的荷载分布函数为：

x 方向分量为　$-\rho\ddot{u}(x,y)$，

y 方向分量为　$-\rho\ddot{v}(x,y)$。

所以总势能中有关惯性力的项为

$$T=\iint_{\Delta}\rho\ddot{u}(x,y)u(x,y)dxdy+$$
$$+\iint_{\Delta}\rho\ddot{v}(x,y)v(x,y)dxdy \tag{56}$$

$$=\rho[\ddot{u}_i\ \ \ddot{u}_j\ \ \ddot{u}_k]\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k\end{bmatrix}+$$
$$+\rho[\ddot{v}_i\ \ \ddot{v}_j\ \ \ddot{v}_k]\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k\end{bmatrix} \tag{57}$$

式中，

$$m_{11}=\iint_{\Delta}p^2dxdy;\ \ m_{12}=\iint_{\Delta}pqdxdy;\ \ m_{13}=\iint_{\Delta}prdxdy;$$
$$m_{21}=\iint_{\Delta}qpdxdy;\ \ m_{22}=\iint_{\Delta}q^2dxdy;\ \ m_{23}=\iint_{\Delta}qrdxdy;$$
$$m_{31}=\iint_{\Delta}rpdxdy;\ \ m_{32}=\iint_{\Delta}rqdxdy;\ \ m_{33}=\iint_{\Delta}r^2dxdy. \tag{58}$$

上式中 p、q、r 分别表示 $p(x,y)$，$q(x,y)$，$r(x,y)$。大家知道，式(58)的积分有如下简单形式[1]：

$$m_{11}=m_{22}=m_{33}=\Delta/12,$$
$$m_{12}=m_{21}=m_{13}=m_{31}=m_{23}=m_{32}=\Delta/24。$$

将以上结果按结点位移向量

$$[u_i\ \ v_i\ \ u_j\ \ v_j\ \ u_k\ \ v_k]$$

重新排列为

$$M_i=\frac{\rho\Delta}{24}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

---

1) 证明见：河島佑男，動的応答解析（培風館，コンピュータのための構造工学講座 II-4-A）。

LM 法与 CM 法的比较

最稳重的津基威茨（Zienkiewicz）在《工程科学中的有限元法》（Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971）一书中指出："……一致质量矩阵是适用于分析的唯一可接受的矩阵"。

津基威茨认为 LM 法的理论不够充分，断定只有 CM 法才是正统的。关于这一点近年来有如下认识：

1）若对单元内加速度的分布采用 0 次式插值函数（在图 1.4 所示的区域内取常值的分段函数），LM 法可用能量法推导而得。

2）在使用能量原理时，只对位移分布式求导（表示为 $\partial u/\partial x$ 等），而未对加速度求导，所以两者不一定采用相同的插值函数（加速度分布可用较低次的插值函数表示）。

3）可以证明，若无限细分下去，即使是 LM 法也能收敛于精确解。

所以，至少可以说在理论上不必拘泥于 CM 法。从上述 2）的观点看，CM 法甚至有点过于浪费。

由于 LM 法的计算简单得多，如果认为两种方法都可以，则最好采用 LM 法。有时，实际工作者会担心精度问题，CM 法对单元内加速度分布按一次近似，它比起按 0 次近似的 LM 法来说，精度当然高一些，但其工作量却要大得多，采用 CM 法是否值得，曾有各种实验比较[1]，由于其结果相当微妙，一般差别不大，有时却相差悬殊，所以很难得出明确的结论。

采用粗分割所存在的问题

1）参阅：

山本善之、山田善一，マトリックス構造解析の誤差论（培風館，コンピュータによる構造工学講座II 6-B）。

ホランド，ベル，有限要素法——応力解析への応用（朝倉書店）。

Clough and Bathe, Finite Element Analysis of Dynamic Response (Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, UAH Press, pp. 153—179）等。

关于分布质量的处理还有一个难办的问题。

例如，分析一个长方体的振动，按图 1.6 (a) 那样划分单元(为简单起见，令长方体宽 1 m、高 2 m、厚 1 m，比重为 2，按二维问题处理)，若采用 LM 法，把三角形单元质量等分给三个顶点，则各单元的质量为 10^3kg，三个顶点各得三分之一，结果各结点所分配的质量如图 1.6(b)所示。

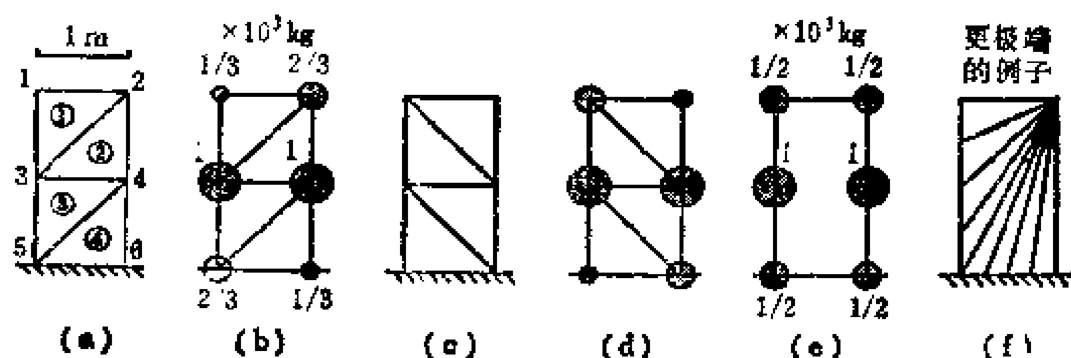


图 1.6 长方体的分割图及其集中质量

奇怪的是原来的长方体是左右对称的，但它的集中质量模型却不对称。若按这种方法计算自重引起的静变形会得出荒谬的结果，即使外力为 0 也要往右倾。相反，若按图 1.6(c)那样划分单元，则集中质量模型如图 1.6(d)所示，其静变形却往左倾。从图 1.6 (b)、(d) 可见不平衡是相当严重的。这对于动力分析必然产生很坏的影响。

即使采用 CM 法也不能解决这种不正常现象[读者不妨按式(59)算算]。与其说 CM 法反映问题深刻，不如说 LM 法更为适用。因为它可以根据工程经验设置集中质量（人为地直接设置）。例如采用图 1.6 (e)那样的模型，而 CM 法则不可能这样简便地处理问题。

这个问题没有根本的解决办法，本来用粗分割的有限元法就不可避免要引起一些误差，其结果与工程常识有出入也是可能的。要避免这些不正常现象的出现，可采取以下措施：

1) 若分析对象是对称的，就应作对称的分割。

2）尽量使各结点连接的单元数均衡。

3）取两种分割的平均值[将图 1.6 (b)、(d) 平均得图(e)]计算。

§ 1.5 建立阻尼矩阵的方法

阻尼的机理很复杂，要考虑各种因素作详细的研究是很困难的。如果令阻尼力等于 $C\dot{u}$，而不使用难以得到的参数，就相当简单。从宏观看，阻尼有两种主要形态：由结构物周围的流体等粘性介质产生的阻尼以及由结构本身的内摩擦引起的阻尼。前者称**粘性阻尼**，后者称**结构阻尼**。即静止介质产生的作用力叫做粘性阻尼；振动结构（分析对象）内部的相互作用称结构阻尼。按这分类，结构物本身的粘性效应属结构阻尼。

例如在弹簧上挂一重物，用手稍许拉伸后放开，它开始以大致相等的振幅振动，不久振幅逐渐变小直至停止振动，其主要原因是受到空气阻尼的影响。若放入油内作试验，则振幅更快地衰减。可是，即使在真空容器中作试验，阻尼也不完全为零，振动迟早总要停止，这是弹簧内部（金属晶格之间、分子之间）摩擦所致。

即使是粘性阻尼，要完全用数学形式表示也是极为困难的。即使可以表示，实用上也没有必要弄得如此复杂，因此，决定非常粗略地取作一次式

$$阻尼力 = C\dot{u}.$$

这种简单的粘性阻尼模型与结构阻尼仍大不相同。粘性阻尼与各点速度成比例，结构阻尼与各点变形速度成比例（以下所谓“成比例”无疑也是近似的）。

例如在图 1.7 (a)所示的体系中，点 1 和 点 2 以相同速度运动（平动）时，粘性阻尼力起作用而结构阻尼力为 0。若弹性体拉伸或压缩，则发生与其变形速度成比例的结构阻尼，即结构阻尼与其相邻结点的速度差成比例。因此，这个系统的阻尼模型可

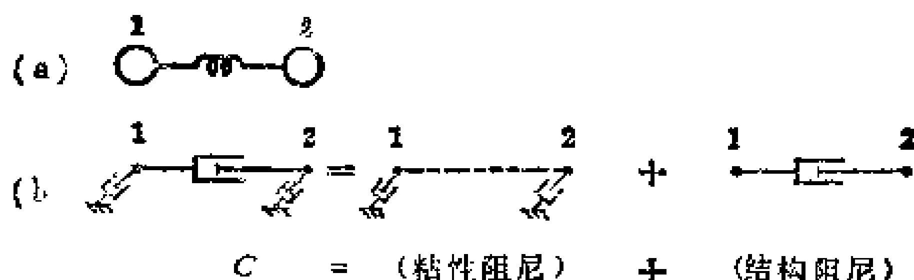


图 1.7 粘性阻尼和结构阻尼

表示如图 1.7(b)。它可用下式表示

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_v & 0 \\ 0 & c_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix}.$$

式中，右边第一项为粘性阻尼，第二项为结构阻尼。由此式可知，粘性阻尼矩阵与质量矩阵相似，结构阻尼矩阵与刚度矩阵相似。在单元矩阵这一级普遍存在这性质。

由建立阻尼矩阵的方法，可说明上述矩阵相似的原因。故将粘性阻尼力取为连续变量，并设为下列形式[1)]：

$$f_v(x,y,z) = C_v(x,y,z)\dot{u}(x,y,z).$$

应将它换算成作用在各结点的集中力

$$\boldsymbol{f}_v = C_v\dot{\boldsymbol{u}}.$$

其方法与把连续变化的惯性力

$$f_{惯}(x,y,z) = \rho(x,y,z)\ddot{u}(x,y,z)$$

换算成作用在各结点的集中力

$$\boldsymbol{f}_{惯} = M\ddot{\boldsymbol{u}}$$

的方法相同，可以按 LM 法和 CM 法执行（似乎可称为堆聚阻尼和一致阻尼）。因此所得的矩阵应该是相似的。另一方面，结构阻尼 C_s 的建立，严格说来应根据式

$$\{\sigma_s\} \backsim \{\dot{e}\},$$

（式中 σ 是应力，e 是应变，脚标 s 表示结构阻尼）但因其过程与

1) $\boldsymbol{f}_v$ 应有各坐标分量，这是简记，以下都同。

根据胡克定律

$$\{\sigma\}=D\{\varepsilon\}$$

来建立刚度矩阵K在形式上是一样的，所以得到的矩阵也应当相似。

比例阻尼模型

反过来利用上述性质可以非常简单地建立阻尼矩阵。即先作质量矩阵M和刚度矩阵K，再将它们乘上适当的系数作为粘性阻尼矩阵C_v和结构阻尼矩阵C_s，写成

$$\begin{aligned}&C_v=\alpha M,\\&C_s=\beta K,\\&C=C_v+C_s=\alpha M+\beta K.\end{aligned}\tag{60}$$

式中，α，β为常数，由实验确定。

乍一看来，这方法好像有点胡乱凑合，但根据上述理论将它用于单元一级是合理的，且是相当接近实际情况的。由于α，β是按单元的材质、环境及其他条件（若为梁单元，与截面形状等有关）来决定的量，原则上对各单元应取不同的值，然而为简便起见，对所有单元可取相同的α，β值计算。于是，式(60)对整体矩阵一级成立。运动方程

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=f$$

变成

$$M(\ddot{u}+\alpha\dot{u})+K(\beta\dot{u}+u)=f,\tag{61}$$

特征值问题

$$\lambda^2Mu+\lambda Cu+Ku=0$$

成为

$$(\lambda^2+\alpha\lambda)Mu+(\beta\lambda+1)Ku=0.\tag{62}$$

这方法计算非常简单（详细情况在第二章和第三章中说明），为实际工作者广泛采用。这就是通常所称的**比例阻尼法**。狭义地说，只有

$$C=\alpha M$$

设

$$C = \beta K$$

才称为比例阻尼。本书采用广义解释，对整体结构称

$$C = \alpha M + \beta K$$

为比例阻尼。

一般而论，单从理论上看，比例阻尼模型并不完全合理，且其计算结果也不完全符合实际情况。事实上，由于结构既有"柔软且阻尼大的材料"，也有相反性质的材料，一律认为 $C_s = \beta K$ 是不恰当的。再则，粘性阻尼原则上只作用在物体表面，其大小应主要取决于包围物体的粘性流体的性质（比如在空气中的阻尼小，在泥土中的阻尼大）。若一律认为 $C_v = \alpha M$，就意味着物体内部也有粘性阻尼力作用[1]，而却完全忽略物体周围的流体特性，并且认为比重大的部分比起比重小的部分受更大的粘性阻尼力作用，这是很不合理的。

然而，除了明显的非均质体外，均可采用比例阻尼模型。如果整个物体的材质、结构及其他条件都一样，则可对整体矩阵一级使用 $C_s = \beta K$。如果整个物体的粘性阻尼效应都一样，则可对整体矩阵一级使用 $C_v = \alpha M$。事实上，这种情况是较普遍的，这时采用比例阻尼模型是方便的。

---

1) 本书所说的粘性阻尼是指静止的粘性流体对振动物体的作用力。而振动物体本身的粘弹性包含在结构阻尼中。

第二章　振动的仿真

振动分析的方法很多，仿真(*Simulation*)是其中最直接的一种，它可以应用于包括非线性振动在内的各种问题。

通常采用线性加速度法、纽马克(Newmark)β法、威尔逊(Wilson θ)法、侯博特(Houbolt)法、龙格-库塔(Runge-Kutta)法等建立计算公式。对于高频分量和低频分量混合的问题，若采用无条件稳定的解法，可以提高计算效率。

§ 2.1　基本的研究方法

所谓仿真就是用模拟的手段将随时间变化的现象再现（或者虚构某种现象）。虽然模拟的手段很多，但由于用计算机进行数值计算非常方便，一般都采用计算机模拟。因此，实际上可以认为仿真就是“利用计算机进行数值实验”的方法。本书也是从这个意义上来使用这个术语的。

对振动研究而言，所谓仿真就是求运动方程的数值解，以研究结构在特定条件下的振动特性。这种方法对研究动态响应极为有效，例如，可用以研究地震对结构物的影响。

从数学观点看，仿真是“解微分方程初值问题的逐步法”。因此，仿真运算可以利用求微分方程数值解的各种方法。通常，振动问题的仿真计算量大，即使采用计算机仍需花费相当长的时间。为了尽量缩短计算时间，并得到高精度的结果，必须采用高效率的计算方法。为此，本章详细介绍各种计算公式。

作为导引，我们通过简单的例子说明振动仿真的基本思路。

例 2.1　单自由度系统振动的仿真

在弹簧刚度 $k=1\ \mathrm{g/s^2}$ 的弹簧上，挂一质量 $m=1\ \mathrm{g}$ 的重物，并从静平衡位置拉长 $x_0=1\ \mathrm{cm}$，然后手静止地离开(初速度 $\dot{x}_0=$

cm/s)。假定弹簧足够长，当$|u|<1$时，弹簧处于弹性状态，试研究系统的振动。

这一问题的数学模型已在第一章中建立，它就是图1.2中当$m=k=1$时的情况。运动方程为

$$\ddot{u}+u=0. \tag{1}$$

初始条件为：设$t=0$时(手离开的时刻)，

$$u(0)=1,\ \dot{u}(0)=0.$$

这个问题按§3.1所述的要点分析可得到准确解析解

$$u(t)=\cos t.$$

但这里我们不用解析的方法，而按仿真法求解。

为了用仿真法解这个问题，首先计算短暂时间Δt(例如$\Delta t=0.1$秒)后的状态，其次计算下一个Δt秒后的状态，然后计算再下一个Δt秒后的状态……，这样逐步计算下去。

计算Δt秒后的状态有各种方法，如果考虑简单一点，可按以下方法进行。

$$\begin{aligned} u(t+\Delta t)&=u(t)+\dot{u}(t)\Delta t,\\ \dot{u}(t+\Delta t)&=\dot{u}(t)+\ddot{u}(t)\Delta t. \end{aligned} \tag{2}$$

上式是用位移代替下式中的位置而得到的：

Δt秒后的位置=(现在的位置)+(速度)·Δt，

Δt秒后的速度=(现在的速度)+(加速度)·Δt.

把式(2)和由式(1)推导得的

$$\ddot{u}(t)=-u(t) \tag{3}$$

联合起来，即可完全决定由时刻t到时刻$t+\Delta t$的状态(不必用其他式子和数据)。

试用笔算计算最初几步。因为开始时$t=0$，$u(0)=1$，$\dot{u}(0)=0$，据式(3)有

$$\ddot{u}(0)=-u(0)=-1.$$

据上式和式(2)有

$$u(0.1)=1+0\times0.01=1,$$

$$\dot{u}(0.1)=0+(-1)\times 0.1=-0.1.$$

因此

$$\ddot{u}(0.1)=-1.$$

下一个 Δt 后的状态为

$$u(0.2)=1+(-0.1)\times 0.1=0.99,$$
$$\dot{u}(0.2)=-0.1+(-1)\times 0.1=-0.2,$$
$$\ddot{u}(0.2)=-0.99.$$

再下一个 Δt 后的状态为

$$u(0.3)=0.99+(-0.2)\times 0.1=0.97,$$
$$\dot{u}(0.3)=-0.2+(-0.99)\times 0.1=-0.299,$$
$$\ddot{u}(0.3)=-0.97.$$

以下计算按同样方式进行。

对于更复杂的问题也可同样处理。例如对有阻尼强迫振动问题

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f(t),$$

可将

$$\ddot{u}=\{f(t)-ku-c\dot{u}\}/m \tag{4}$$

与式(2)联合，对多自由度的情况

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \tag{5}$$

同样地可按如下公式逐步计算：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\boldsymbol{u}(t)+\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}(t),\\ &\dot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)=\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\Delta t\ddot{\boldsymbol{u}}(t),\\ &\ddot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)=\boldsymbol{M}^{-1}\{\boldsymbol{f}(t+\Delta t)-\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\\ &\qquad -\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)\}. \end{aligned} \tag{6}$$

欧拉法

按式(2)计算的方法称欧拉法。通常，欧拉法的算式可写成

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\dot{u}(t)\Delta t, \tag{7}$$

至于式(2)中的另一个式子，形式完全与上式相同，只不过是将变量 $u(t)$ 换为 $\dot{u}(t)$。

若 Δt 足够小，欧拉法可得到良好的结果。实际上，理论分析表明，对于 $\Delta t \to 0$ 的情况，用欧拉法算得的数值收敛于精确解[1]。然而，当 Δt 不够小时，其结果就不一定好，从上节的例题也可看出其误差有逐渐增大的趋势。

对产生误差的原因可作各种解释，现只说明其物理原因。由时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$ 之间速度 $\dot{u}$ 的值实际上是变化的，但式(7)却用常量计算(用时刻 t 的值)。

$t+\Delta t$ 时位移的精确解应如下式所示：

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\int_t^{t+\Delta t}\dot{u}(t)dt. \tag{8}$$

这可看作是微分学基本公式

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

的变形。对式(8)作分部积分

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\frac{\Delta t}{1!}\dot{u}(t)+\int_t^{t+\Delta t}(t+\Delta t-\tau)\ddot{u}(\tau)d\tau, \tag{9}$$

再进行一次分部积分，上式变为

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\frac{\Delta t}{1!}\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\ddot{u}(t)+$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}(t+\Delta t-\tau)^2\dddot{u}(\tau)d\tau.$$

按同样方法继续运算，结果得到按台劳(Taylor)级数表示的形式

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\frac{\Delta t}{1!}\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\ddot{u}(t)+$$
$$+\frac{(\Delta t)^3}{3!}\dddot{u}(t)+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\Delta t)^k}{k!}u^{(k)}(t). \tag{10}$$

---

1) 参阅：ヘンリチ(清水、小林訳)，計算機による常微分方程式の解法 I (サイエンス社)。

若将上面"精确公式"与"计算所用的公式"(7)比较，欧拉法的实质就很清楚了，这就是[1)]：

1）欧拉法是取台劳级数展开式的前两项而略去其余各项的解法。

2）所以，每前进一时间步长 Δt 只引入误差

$$R=\int_{t}^{t+\Delta t}(t+\Delta t-\tau)\ddot{u}(\tau)d\tau=\frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}(\xi).$$

(这里，$\ddot{u}(\xi)$是在区间$[t,t+\Delta t]$中 $\ddot{u}$ 的平均值。另外，因 R 是由精确值减去计算值而得，这意味着当 $R>0$ 时计算值过小，当 $R<0$ 时计算值过大)。

3）在振动问题中应用欧拉法时，在波峰部分 $\ddot{u}<0$，因而 $R<0$，即计算值过大；在波谷部分 $\ddot{u}>0$ 因而 $R>0$，即计算值过小。总之，与精确解相比，数值解的振幅有逐渐增大的趋势。

提高精确度的方法

为了改进欧拉法建立精确度更高的公式，采取以下两个基本方针：

1）对台劳级数展开式取到更高次项。

2）对式(8)的积分采用具有更高精度的近似式。

若采取基本方针 1)，在式(7)里再加上一项得

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\dot{u}(t)\Delta t+\ddot{u}(t)(\Delta t)^2/2. \tag{11}$$

对于振动问题，$\ddot{u}$ 是加速度，而加速度可以直接由微分方程计算，例如，对单变量问题可用式(4)

$$\ddot{u}(t)=\{f(t)-ku(t)+c\dot{u}(t)\}/m; \tag{12}$$

对多变量问题可用式(5)

$$\ddot{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{M}^{-1}\{\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}(t)\}. \tag{12'}$$

根据不同情况，按上两式算得 $\ddot{u}(t)$或 $\ddot{\boldsymbol{u}}(t)$后就可代入式(11)求得 $u(t+\Delta t)$。对于 $\dot{u}(t+\Delta t)$的计算，虽然采用欧拉式比较简单，

1) 要了解欧拉法更详细的结果，可参阅一松信，微分方程式を中心とした微分積分学(裳華房)。

但为了提高精度可采用与式(11)相应的形式，其计算式为

$$\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+\ddot{u}(t)\Delta t+\dddot{u}(t)(\Delta t)^2/2. \tag{13}$$

因此，必须计算 $\dddot{u}(t)$，这可以从式(12)对 t 求导而得[或根据问题的性质对与式(12)相当的式子求导]。例如，若对式(12)求导，则因为

$$\dddot{u}(t)=\{\dot{f}(t)-k\dot{u}(t)-c\ddot{u}(t)\}/m^{1)}, \tag{14}$$

故可先用式(12)求 $\ddot{u}(t)$，将它代入式(14)求 $\dddot{u}$，然后再将它们代入式(13)计算 $\dot{u}(t+\Delta t)$。

对式(14)再求导，可得更高阶的导数，这样一直计算到 p 阶导数，若设

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\frac{\Delta t}{1!}\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\ddot{u}(t)+\cdots+ \\ +\frac{(\Delta t)^p}{p!}u^{(p)}(t), \tag{15}$$

则可得到更高精度的近似解，这种方法叫做**台劳展开法**。

另一方面，若采取方针 2)，用数值积分的梯形公式，令

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\frac{\dot{u}(t)+\dot{u}(t+\Delta t)}{2}\Delta t, \tag{16}$$

这个方法叫**梯形法**. 为了提高精度，还可考虑其他方法。若在区间[t, $t+\Delta t$]采用辛普生(Simpson)公式，则

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\frac{\dot{u}(t)+4\,\dot{u}(t+\Delta t/2)+\dot{u}(t+\Delta t)}{6}\Delta t. \tag{17}$$

同样也可采用更高阶的牛顿-柯兹(Newton-Cotes)公式。一般地 $u(t+\Delta t)$ 可表示为

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\sum_{\nu=0}^{p}a_\nu\dot{u}(t+\nu\Delta t/p). \tag{17'}$$

式中，a_ν 是牛顿-柯兹积分公式的系数。如后所述，这种类型的公式计算效率不高，因此很少用于振动计算中，而往往常表计算

---

1) 原文误为 $\ddot{u}(t)=\dot{f}(t)-k\dot{u}(t)-c\ddot{u}(t)$。——译注

预测-校正法(后述)的初值，这就是所谓皮卡德(Picard)法。

为了解微分方程

$$\dot{u}=\phi(u,\ t),\ [\text{初始条件：}\ u(a)=\alpha]$$

适当地取第一次近似解 $u_1(t)$，然后按下式反复迭代：

$$u_{k+1}(t)=\alpha+\int_a^t \phi(u_k(t),\ t)dt,$$

精度可以不断提高，这就是基本的皮卡德法。若采用牛顿-柯兹公式计算上面的积分式就得到式(17′)。另一方面，由于在式(17′)的右边包含未知量 $\dot{u}(t+\nu\Delta t/p)$，为了确定它，又需使用皮卡德法反复迭代计算[1]。

§ 2.2 线性加速度法

振动问题的常用解法还有**线性加速度法**，它是综合上述两个方针得出的方法。基本公式如下：

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{6}\ddot{u}(t-\Delta t), \tag{18}$$

$$\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+\Delta t\frac{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)}{2}, \tag{19}$$

式(19)是对变量 $\dot{u}$ 应用梯形法[式(16)]所得的公式。其次改写式(18)为

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\ddot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^3}{3!}\cdot\frac{\ddot{u}(t+\Delta t)-\ddot{u}(t)}{\Delta t}, \tag{20}$$

我们可看出，此式大致相当于取到台劳展开式的三次项。它的物理意义是假定从时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$ 加速度成直线变化(为时间的一次函数)。事实上，

---

1) 关于皮卡德法的具体计算式见：森口繁一、高田勝，数値計算法II，現代応用数学講座 B 13-1(岩波書店)。

$$\ddot{u}(t+h)=\ddot{u}(t)+\alpha h \tag{21}$$

式中设

$$\alpha=\{\ddot{u}(t+\Delta t)-\ddot{u}(t)\}/\Delta t$$

对上式由 $h=0$ 到 $h=\Delta t$ 积分得到式(19)，再次积分得到式(18)。与上述欧拉法相比可看出：在式(2)中计算位移时假设速度为常量，计算速度时假设加速度为常量；而在式(18)、(19)中计算位移时假设加速度为二次式，计算速度时假设加速度为一次式。可以预期后者的精度高于前者。

对于振动问题，加速度(大体上)成波形变化（典型的波形为 $u=\sin t$、则 $\ddot{u}=-\sin t$），虽然"加速度为线性变化"的假定对于图 2.1(a)的情况是恰当的，但对于图 2.1(b)的情况则不合理。所以在选取时间步长 Δt 的大小时必须注意到这一点。

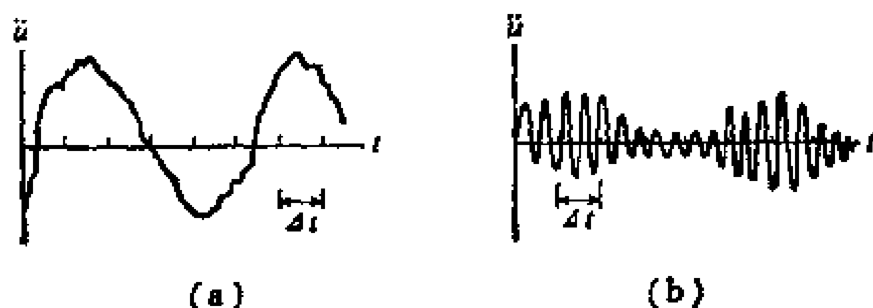


图 2.1　加速度的变化与步长幅度的关系

(a) 可看作直线的情况；

(b) 不能看作直线的情况。

迭代解法

线性加速度法与欧拉法不同，它属于隐式解法类型．计算时要多费点功夫。式(18)、(19)是当仿真运行到 t 阶段时计算 $t+\Delta t$ 状态的公式。这时，$u(t)$，$\dot{u}(t)$，$\ddot{u}(t)$ 是已知的，但 $u(t+\Delta t)$，$\dot{u}(t+\Delta t)$ 和 $\ddot{u}(t+\Delta t)$ 是未知的，三个未知数只有两个方程，还差一个方程，故应联合运动微分方程式求解。由于问题的性质不同，联合的运动微分方程也不同，例如对下面形式的方程

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f, \tag{22}$$

式(18)、(19)可以同下式联合

$$m\ddot{u}(t+\Delta t)+c\dot{u}(t+\Delta t)+ku(t+\Delta t)=f(t+\Delta t). \tag{23}$$

所谓隐式解法是不断求出"在新的时刻满足微分方程式的近似解"的解法。虽然计算工作量较大，但因精度和稳定性都较好(后述)，所以常被采用。另一种解法则称显式解法。

解联立方程大致有直接法(代入法、消去法)和迭代法两种方法。所选择的方法不同，计算步骤也大不相同。首先研究迭代解法，其步骤如下：

1) 设 $\ddot{u}(t+\Delta t)$的第一次近似值为

$$\ddot{u}(t+\Delta t)\cong\ddot{u}(t),$$

或对原存贮的 $\ddot{u}(t-\Delta t)$外插得

$$\ddot{u}(t+\Delta t)\cong 2\ddot{u}(t)-\ddot{u}(t-\Delta t).$$

2) 将它代入式 (18)、(19) 求 $u(t+\Delta t)$, $\dot{u}(t+\Delta t)$的近似值。

3) 将 2)的结果代入运动微分方程求 $\ddot{u}(t+\Delta t)$的更好的近似值[也可采用式(4)、(11)等公式来求]。

然后判断是否收敛，若不收敛则返回 2)。虽然原则上是这样，但认真地作收敛判断既麻烦又花时间，较简单的办法是先研究开始的收敛情况然后规定迭代次数。

通常，这种迭代法的关键是尽量选用好的初始值和合适的增量 Δt(不要过大)，这样做就可以把必须的迭代次数减至最少(如有可能可试算一、二次)。

若 Δt 太大，迭代将不收敛。关于 Δt 的界限值已作过理论研究[1]。例如对于微分方程

$$m\ddot{u}+ku=0,$$

已得到下面结论：

---

1) N. M. Newmark. A method Computation for Structural Dynamics, Proc ASCE, Vol. 85(1959) EM 3.

$$\Delta t < \sqrt{\frac{6m}{k}} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}T \simeq 0.4T.$$

这里T是固有周期。

直接解法(之一)

解联立方程的直接法很多，最易理解的方法的步骤如下：

1) 将式(18)、(19)代入运动微分方程式

2) 解方程求 $\ddot{u}(t+\Delta t)$。

3) 将结果代回式(18)、(19)。

例如，运动微分方程为式(22)的形式时，将式(18)、(19)代入式(23)后有

$$m\ddot{u}(t+\Delta t)+c\left\{\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)}{2}\Delta t\right\}+$$

$$+k\left\{u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{6}\ddot{u}(t+\Delta t)\right\}=$$

$$f(t+\Delta t),$$

解出 $\ddot{u}(t+\Delta t)$如下：

$$\ddot{u}(t+\Delta t)=$$

$$\frac{f(t+\Delta t)-c\left\{\dot{u}(t)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)\right\}-k\left\{u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{u}(t)\right\}}{m+(\Delta t/2)c+\{(\Delta t)^2/6\}k}. \tag{24}$$

上式的右边都是已知量，于是可求得 $\ddot{u}(t+\Delta t)$。再代回式(18)、(19)可求得 $u(t+\Delta t)$，$\dot{u}(t+\Delta t)$。同理，对多自由度问题

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},$$

有计算式

$$\ddot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)=\left\{\boldsymbol{M}+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{C}+\frac{(\Delta t)^2}{6}\boldsymbol{K}\right\}^{-1}\Big[\boldsymbol{f}(t+\Delta t)-$$

$$-\boldsymbol{C}\left\{\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\right\}-\boldsymbol{K}\left\{\boldsymbol{u}(t)+\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\right.$$

$$+\frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{u}(t)\Big\}\Big]; \tag{25 a}$$

$$\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+\Delta t\frac{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)}{2}; \tag{25 b}$$

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{6}\ddot{u}(t+\Delta t). \tag{25 c}$$

因为式中出现的矩阵

$$M+(\Delta t/2)C+\{(\Delta t)^2/6\}K$$

在各阶段都相同，可在第一次计算中预先作三角分解（或求逆矩阵）[1]。

直接解法（之二）

在上述式子中虽然可以先消去 $u(t+\Delta t)$和 $\dot{u}(t+\Delta t)$，但也可以先消去 $\dot{u}(t+\Delta t)$和 $\ddot{u}(t+\Delta t)$。为此，由式(18)求 $\ddot{u}(t+\Delta t)$：

$$\ddot{u}(t+\Delta t)=\frac{6}{(\Delta t)^2}u(t+\Delta t)-\frac{6}{(\Delta t)^2}u(t)-\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(t)-2\ddot{u}(t), \tag{26}$$

将它代入式(19)得

$$\begin{aligned}\dot{u}(t+\Delta t)&=\dot{u}(t)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)+\frac{3}{\Delta t}u(t+\Delta t)-\frac{3}{\Delta t}u(t)-\\&\quad-3\dot{u}(t)-\Delta t\ddot{u}(t)\\&=\frac{3}{\Delta t}u(t+\Delta t)-\frac{3}{\Delta t}u(t)-2\dot{u}(t)-\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t),\end{aligned} \tag{27}$$

然后将它们代入式(23)解 $u(t+\Delta t)$：

$$u(t+\Delta t)=\frac{\begin{aligned}&m\left\{2\ddot{u}(t)+\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(t)+\frac{6}{(\Delta t)^2}u(t)\right\}+\\&+c\left\{\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)+2\dot{u}(t)+\frac{3}{\Delta t}u(t)\right\}+f(t+\Delta t)\end{aligned}}{k+3c/\Delta t+6m/(\Delta t)^2}. \tag{28}$$

1）参阅《入门》174—179页。

上式右边完全是已知数，可作数值计算。将其结果代回式(27)可求得$\dot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)$的值。若要知道加速度值可用式(26)计算。对多自由度系统可同样处理。其计算步骤归纳如下：

1) $$\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\left\{K+\frac{3}{\Delta t}C+\frac{6}{(\Delta t)^2}M\right\}^{-1}\left[M\left\{2\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{6}{\Delta t}\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{6}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{u}(t)\right\}+C\left\{\frac{\Delta t}{2}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+2\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{3}{\Delta t}\boldsymbol{u}(t)\right\}+\boldsymbol{f}(t+\Delta t)\right], \quad (29\ \mathrm{a})$$

2) $$\dot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)=\frac{3}{\Delta t}\left\{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\right\}-2\dot{\boldsymbol{u}}(t)-\frac{\Delta t}{2}\ddot{\boldsymbol{u}}(t); \quad (29\ \mathrm{b})$$

3) 若要知道加速度值，可由下式计算：

$$\ddot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)=\frac{6}{\Delta t^2}\{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\}-\frac{6}{\Delta t}\dot{\boldsymbol{u}}(t)-2\ddot{\boldsymbol{u}}(t). \quad (29\mathrm{c})$$

这个公式由威尔逊提出并得到相当广泛的采用。式中所出现的$1/\Delta t$，$1/(\Delta t)^2$等项并不是为了减少误差而采用的特殊方法所引起的，它只不过是原封不动地保留消去过程中所出现的各项而已。虽然保持此式原状没有什么害处，但若写成如下形式则更为自然[后二式直接由式(18)、(19)得到]。

$$\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\left\{M+\frac{\Delta t}{2}C+\frac{(\Delta t)^2}{3!}K\right\}^{-1}\left[M\left\{\boldsymbol{u}(t)+\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\right\}+C\left\{\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{3}\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{(\Delta t)^3}{12}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\right\}+\frac{(\Delta t)^2}{6}\boldsymbol{f}(t+\Delta t)\right];^{1)} \quad (30\ \mathrm{a})$$

1) 原文误为

$$\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\left\{M+\frac{\Delta t}{2}C+\frac{(\Delta t)^2}{3!}K\right\}^{-1}\left[M\left\{\boldsymbol{u}(t)+\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{1}{3}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\right\}+C\left\{\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{3}\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{(\Delta t)^3}{12}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\right\}+\boldsymbol{f}(t+\Delta t)\right].$$ ——译注

$$\ddot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)=\frac{3!}{(\Delta t)^2}\left[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\left\{\boldsymbol{u}(t)+\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\right\}\right]; \tag{30 b}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)=\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\Delta t\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\ddot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)}{2}. \tag{30 c}$$

直接解法(一般讨论)[1]

解上述联立方程还有一种可能是先消去 $\boldsymbol{u}_{n+1}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+1}$ 解 $\dot{\boldsymbol{u}}_{n+1}$，但这种方法计算工作量大、精度差，故不实用。

以上是以 $\boldsymbol{u}_{n+1}$，$\dot{\boldsymbol{u}}_{n+1}$ 或 $\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+1}$ 本身为未知数的情况，此外还可以用这些量的区间增量 $\Delta\boldsymbol{u}_{n+1}$，$\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_{n+1}$，$\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+1}$ 为未知数，此时方程(18)、(19)、(23)变成(令 $h\equiv\Delta t$)：

$$\Delta\boldsymbol{u}=h\dot{\boldsymbol{u}}_n+(h^2/2)\ddot{\boldsymbol{u}}_n+(h^2/6)\Delta\ddot{\boldsymbol{u}},$$

$$\Delta\dot{\boldsymbol{u}}=h\ddot{\boldsymbol{u}}_n+(h/2)\Delta\ddot{\boldsymbol{u}},$$

$$M\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}+C\Delta\dot{\boldsymbol{u}}+K\Delta\boldsymbol{u}=\Delta\boldsymbol{f}.$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} I & 0 & -h^2/6 \\ 0 & I & -h/2 \\ K & C & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{u} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{u}} \\ \Delta\ddot{\boldsymbol{u}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h\dot{\boldsymbol{u}}_n+(h^2/2)\ddot{\boldsymbol{u}}_n \\ h\ddot{\boldsymbol{u}}_n \\ \Delta\boldsymbol{f}\end{bmatrix}.$$

它的消去顺序虽然还是三种，但最好的一种是解 $\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+1}$，其计算步骤如下：

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}=\left(M+\frac{h}{2}C+\frac{h^2}{6}K\right)^{-1}\left\{\Delta\boldsymbol{f}-hC\ddot{\boldsymbol{u}}_n-K\left(h\dot{\boldsymbol{u}}_n+\frac{h^2}{2}\ddot{\boldsymbol{u}}_n\right)\right\},$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{n+1}=\dot{\boldsymbol{u}}_n+h\ddot{\boldsymbol{u}}_n+(h/2)\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}_n,$$

$$\boldsymbol{u}_{n+1}=\boldsymbol{u}_n+h\dot{\boldsymbol{u}}_n+(h^2/2)\ddot{\boldsymbol{u}}_n+(h^2/6)\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}.$$

1) 戸川隼人，ウイルソン算法について。日本鋼構造協會第9回大會研究集會論文集(1975)。

程序 2.1　线性加速度法

输入M，C，K，初值U，UD($\dot{u}$的标识符)，N(维数)，NN(数组规模)，TSTART(t的初值)，TEND(t的终值)。按线性加速度法计算。按以下格式输出结果。

t

u　$\dot{u}$　$\ddot{u}$　f

```
      SUBROUTINE LAM(M,C,K,U,UD,N,NN,H,TSTART,TEND)
      REAL M,K
      DIMENSION M(NN,NN),C(NN,NN),K(NN,NN),U(NN),UD(NN)
     1,A(50,50),F(50),P(50),Q(50),R(50),U2D(50)
      NA=50
CALCULATION OF U2D(TSTART)
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
    1 A(I,J)=M(I,J)
      CALL DECOMP(A,N,NA)
      CALL EXCITE(F,TSTART,N)
      DO 2 I=1,N
      R(I)=F(I)
      DO 2 J=1,N
    2 R(I)=R(I)-C(I,J)*UD(J)-K(I,J)*U(J)
      CALL SOLVE(A,R,N,NA)
CONSTANTS
      C1=H/2.0
      C2=H*H/6.0
      C3=H*H/3.0
      DO 3 I=1,N
      DO 3 J=1,N
    3 A(I,J)=M(I,J)+C1*C(I,J)+C2*K(I,J)
      CALL DECOMP(A,N,NA)
LOCK
      LAST=(TEND-TSTART)/H+1.0
      DO 10 L=1,LAST
      T=TSTART+FLOAT(L-1)*H
```

```
      DO 5 I=1,N
    5 U2D(I)=R(I)
      CALL EXCITE(F,T,N)
      WRITE(6,6)  T,(U(I),UD(I),U2D(I),F(I),I=1,N)
    6 FORMAT(3H T=,E15.7/500(1H  ,3E15.7,3X,E15.7/))
C CALCULATION OF U2D(T+H)
      DO 7 I=1,N
      P(I)=UD(I)+C1*U2D(I)
    7 Q(I)=U(I)+H*UD(I)+C3*U2D(I)
      DO 8 I=1,N
      R(I)=F(I)
      DO 8 J=1,N
    8 R(I)=R(I)-C(I,J)*P(J)-K(I,J)*Q(J)
      CALL SOLVE(A,R,N,NA)
C CACULATION OF U(T+H)  AND UD(T+H)
      DO 9 I=1,N
      U(I)=U(I)+H*UD(I)+C3*U2D(I)+C2*R(I)
    9 UD(I)=UD(I)+C1*(U2D(I)+R(I))
C CONTINUE
   10 CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE DECOMP(A,N,M)
      DIMENSION A(M,M)
      NM1=N-1
      DO 1 K=1,NM1
      KP1=K+1
      DO 2 J=KP1,N
      A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
    2 CONTINUE
      DO 3 I=KP1,N
      DO 3 J=KP1,N
      A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
    3 CONTINUE
```

```
3  CONTINUE
   RETURN
   END

   SUBROUTINE SOLVE(A,X,N,M)
   DIMENSION A(M,M),X(M)
   NM1=N-1
   DO 1 K=1,NM1
   X(K)=X(K)/A(K,K)
   KP1=K+1
   DO 2 I=KP1,N
   X(I)=X(I)-A(I,K)*X(K)
2  CONTINUE
1  CONTINUE
   X(N)=X(N)/A(N,N)
   DO 3 I=1,NM1
   K=N-I
   KP1=K+1
   DO 5 J=KP1,N
   X(K)=X(K)-A(K,J)*X(J)
5  CONTINUE
3  CONTINUE
   RETURN
   END
```

计算强迫振动项程序

```
   SUBROUTINE EXCITE(F,T,N)
   DIMENSION F(N)
   DATA ALPHA,OMEGA,PHI/1.0, 1.0, 0.0/
   F(1)=ALPHA*SIN(OMEGA*T+PHI)
   DO 1 I=2,N
1  F(I)=0.0
   RETURN
   END
```

§ 2.3 纽马克 β 法

纽马克 β 法是将线性加速度法普遍化的方法之一，它是将式(20)最后一项的系数 1/3! 改为参数 β，通常可写成

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\{(\Delta t)^2/2\}\ddot{u}(t)+\beta(\Delta t)^2\{\ddot{u}(t+\Delta t)-\ddot{u}(t)\}, \tag{31}$$

$$\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+\Delta t\{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)\}/2. \tag{32}$$

β 是调节公式特性的参数，一般取值范围是

$$0\leqslant\beta\leqslant 1/2.$$

若 $\beta=0$，式(31)成为

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\{(\Delta t)^2/2\}\ddot{u}(t),$$

则显式解法的特性加强(参阅 § 2.2)。当 $\beta=1/2$ 时，

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\{(\Delta t)^2/2\}\ddot{u}(t+\Delta t),$$

则隐式解法的特性加强。当 $\beta=1/4$ 时，

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2}\cdot\frac{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)}{2},$$

这意味着在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 以平均加速度 $\{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)\}/2$ 作区间的加速度。

实际上往往固定采用 $\beta=1/6$，因此在多数情况下纽马克法是线性加速度法的别名。此外也常采用 $\beta=1/4$。

具体计算方法与线性加速度法一样，仍然分直接法和迭代法两种。若应用前节"直接解法一"的方式，计算式如下：

$$\ddot{u}(t+\Delta t)=\{M+(\Delta t/2)C+\beta(\Delta t)^2K\}^{-1}\Big[f(t+\Delta t)-C\Big\{\dot{u}(t)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)\Big\}-K\Big\{u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\Big(\frac{1}{2}-\beta\Big)(\Delta t)^2\ddot{u}(t)\Big\}\Big], \tag{33a}$$

$$\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+(\Delta t/2)\{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)\}, \tag{33b}$$

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\frac{\Delta t}{1!}\dot{u}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\ddot{u}(t)+$$

$$+\beta(\Delta t)^3\frac{\ddot{u}(t+\Delta t)-\ddot{u}(t)}{\Delta t}. \tag{33 c}$$

如果应用迭代法，其计算要点为：

1）假设 $\ddot{u}(t+\Delta t)$的第一次近似值．例如

$$\ddot{u}(t+\Delta t)=\ddot{u}(t); \tag{34 a}$$

2）将它代入式(31)、(32) 后得到 $u(t+\Delta t)$，$\dot{u}(t+\Delta t)$的近似值；

3）将此结果代入运动方程解 $\ddot{u}(t+\Delta t)$，得到更接近 $\ddot{u}(t+\Delta t)$真实值的近似值：

$$\ddot{u}(t+\Delta t)=\{f(t+\Delta t)-c\dot{u}(t+\Delta t)-ku(t+\Delta t)\}/m, \tag{34 b}$$

按 2)、3) 两步继续迭代直到收敛。

程序 2.2　纽马克 β 法(按直接法编制)

子程序与程序 2.1 通用，使用方法可参照程序 **2.1**。

```
      SUBROUTINE NMB(M,C,K,U,UD,N,NN,H,TSTART,
     1 END,BETA)
      REAL M,K
      DIMENSION M(NN,NN),C(NN,NN),K(NN,NN),U(NN)
     1 DIMENSION A(50,50),F(50),P(50),Q(50),R(50),U2D(50)
      NA=50
C CALCULATION OF U2D(TSTART)
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
    1 A(I,J)=M(I,J)
      CALL DECOMP(A,N,NA)
      CALL EXCITE(F,TSTART,N)
      DO 2 I=1,N
      R(I)=F(I)
```

```
      DO 2 J=1,N
    2 R(I)=R(I)-C(I,J)*UD(J)-K(I,J)*U(J)
      CALL SOLVE(A,R,N,NA)
C CONSTANTS
      C1=H/2.0
      C2=BETA*H*H
      C3=(0.5-BETA)*H*H
      C4=H*H/2.0
      C5=BETA*H*H
      DO 3 I=1,N
      DO 3 J=1,N
    3 A(I,J)=M(I,J)+C1*C(I,J)+C2*K(I,J)
      CALL DECOMP(A,N,NA)
C CLOCK
      LAST=(TEND-TSTART)/H+1.9
      DO 10 L=1,LAST
      T=TSTART+FLOAT(L-1)*H
      DO 5 I=1,N
    5 U2D(I)=R(I)
      CALL EXCITE(F,T,N)
      WRITE(6,6) T,(U(I),UD(I),U2D(I),F(I),I=1,N)
    6 FORMAT(3H T=, E15.7/500(1H , 3E15.7, 3X, E15.7/))
C CALCULATION OF U2D(T+H)
      DO 7 I=1,N
      P(I)=UD(I)-C1*U2D(I)
    7 Q(I)=U(I)+H*UD(I)+C3*U2D(I)
      DO 8 I=1,N
      R(I)=F(I)
      DO 8 J=1,N
    8 R(I)=R(I)-C(I,J)*P(J)-K(I,J)*Q(J)
      CALL SOLVE(A,R,N,NA)
C CALCULATION OF U(T+H) AND UD(T+H)
      DO 9 I=1,N
      U(I)=U(I)+H*UD(I)+C4*U2D(I)+C5*(P(I)-U2D(I))
    9 UD(I)=UD(I)+C1*(U2D(I)+R(I))
```

```
      CONTINUE
   16 CONTINUE
      RETURN
      END
```

§ 2.4 威尔逊θ法

这个方法也是线性加速度法的变形，它的特点是把线性加速度法进一步扩展。计算步骤与线性加速度法大致相同，所不同的是线性加速度法在时刻 $t+\Delta t$ 使用运动方程，而威尔逊θ法则应用于更后一点的时刻$t+\theta\Delta t(\theta>1)$，即

$$
\begin{aligned}
u(t+\theta\Delta t) &= u(t)+\theta\Delta t\,\dot{u}(t)+\frac{(\theta\Delta t)^2}{3}\ddot{u}(t)+\\
&\quad+\frac{(\theta\Delta t)^2}{6}\ddot{u}(t+\theta\Delta t),\\
\dot{u}(t+\theta\Delta t) &= \dot{u}(t)+\theta\Delta t\,\frac{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\theta\Delta t)}{2}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

它相当于式(18)、(19)。把它们与下式联立求解

$$
m\ddot{u}(t+\theta\Delta t)+c\dot{u}(t+\theta\Delta t)+ku(t+\theta\Delta t)=f(t+\theta\Delta t)
\tag{36}
$$

(这是对式（2）类型的问题而言，对其它类型的问题也可仿此进行)。对求得的$\ddot{u}(t+\theta\Delta t)$内插求$\ddot{u}(t+\Delta t)$：

$$
\ddot{u}(t+\Delta t)=\frac{(\theta-1)\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\theta\Delta t)}{\theta}.
\tag{37}
$$

再将结果代入下列两式求$u(t+\Delta t)$，$\dot{u}(t+\Delta t)$：

$$
u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+(\Delta t)^2\ddot{u}(t)/3+(\Delta t)^2\ddot{u}(t+\Delta t)/6,
$$

$$
\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+\Delta t\{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)\}/2.
$$

这两式与式(18)、(19)相同。

总之是联立求解式(35)、(36)。从原理上讲也可以使用迭代法，但对于威尔逊法中通常Δt取值较大，以用直接法为好（因Δt大则迭代收敛慢）。

本法的物理意义是：假定加速度在时刻t到$t+\theta\Delta t$内为线

性变化，首先计算 $[t, t+\theta\Delta t]$ 区间的近似解，但仅取其中前半部分(到时刻 $t+\Delta t$ 为止)作为正式的近似解而舍去后半部分（时刻 $t+\Delta t$ 以后）。这种巧妙的处理并非出于物理的原因，而主要是数学的（计算技术的）理由。要理解这一点首先应了解关于数值计算的稳定性的知识，这里作一简单介绍。

振动仿真的失败原因之一往往是“步长幅度 Δt 过大”。程序是正确的，输入信息也没有错误，但却得到异常的结果。仔细研究一下可发现：计算刚开始时结果比较正常，但在计算过程中出现异常现象，绝对值迅速增大以致几乎溢出。这种症状称为不稳定现象。产生这种现象的原因很多[1]，也不一定只是 Δt 取值方面的问题，但通常即使是良态方程，若 Δt 过大，多半还是会出现不稳定现象。

那么 Δt 究竟取多大才安全呢？虽然 Δt 的安全值可按公式计算，但通常取小于周期的 1/6。例如，对单自由度系统，当频率为 10 Hz 周期为 0.1 s 时，取 Δt 小于 1/60 s 就稳定。对多自由度系统，则 Δt 应小于最短周期的 1/6。例如若周期为 10 s，0.1s 和 0.01 s 三种波形混合的载波系统，则必须取 Δt 小于(1/600)s，计算才能稳定。

但只是在需要详细研究小波时才这样做，一般在振动计算中起重要作用的是大波[2]，详细研究小波意义不大。实际上，使结构物变得柔弱并导致破坏的原因主要是低振型，而高振型的影响是局部的。后者振幅不大、衰减也快，影响不大。为了次要因素而把 Δt 取得过小是不经济的。

特别是用有限元法分析振动时，若单元分得很细而考虑到第数百阶的高振型的话，则为了与此相称必须把 Δt 取得很小，这就要耗费相当长的计算时间。

1) 参阅戸川隼人誤差解析の基礎(サイエンス社)第 4 章。

2) 本节称波长长的波为大波，波长短的波为小波，注意不要误解成按振幅大小区分。

为了解决这个问题，应使积分沿大波进行而略去小波，如果借用电气术语，则希望积分公式兼备低通滤波器的功能。但对于现在的问题，即使在计算步骤中插入相当于滤波器的操作（例如采用平行移动的办法），也不能解决问题（虽然当 Δt 取得较小时可以使用滤波器除去不稳定性，但当 Δt 太大时则效果不好）。为此，再一次引用电器用语，即使用反馈[1]。

所谓反馈（正确的说是负反馈）是将信息倒回原处修正其不正确部分的一种操作。对于数值积分而言，隐式解法（在§ 2.2 中略加解释过）就具有这个功能。

为了理解这点，试比较属于显式解法的欧拉法和属于隐式解法的线性加速度法。在欧拉法中，由于只采用时刻 t 的数据（和在该点的动态平衡条件）外插，尽管 Δt 取得过大使结果异常也不加校正，而继续向前算下去，这就使误差越来越大。与此相反，因为线性加速度法有一限制条件："在时刻 $t+\Delta t$ 运动方程成立"。这就不会引起太严重的偏离。[例如，要使 $u(t+\Delta t)$ 的数值为很大的正数，则 $\dot{u}(t+\Delta t)$ 也应为很大的正数，为此 $\ddot{u}(t+\Delta t)$ 也为很大的正数，但由于 m，c，k 是正的，为了满足下式

$$m\ddot{u}(t+\Delta t)+c\dot{u}(t+\Delta t)+ku(t+\Delta t)=f(t+\Delta t),$$

则 $f(t+\Delta t)$ 也必须是非常大的数值。反过来说，只要不加上太大的外力，u，$\dot{u}$，$\ddot{u}$ 就不会太大。]

注：关于 β 法的数学依据，要点如下，为简单起见，设运动方程式为 $\ddot{u}+\omega^2u=0$，即 $c=f=0$，$k/m=\omega^2$，将它们代入式（31）、（32），并写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}1 & \omega^2\Delta t/2 \\ 0 & 1+\omega^2\beta(\Delta t)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}(t+\Delta t) \\ u(t+\Delta t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\omega^2\Delta t/2 \\ \Delta t & 1-\omega^2(1/2-\beta)(\Delta t)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}(t) \\ u(t)\end{bmatrix}$$ [2]

1）振动问题的有限单元模型与多极放大器（实际上是数百级！）相似，为了防止异常激振，减小回路的相位滞后，Δt 是很重要的；但如果利用反馈，则稳定效果更好。而且一旦稳定以后，加大 Δt 将使高频分量自然消失。

2）原文有错。——译注

为了使上式不致发散，特征值问题

$$\lambda\begin{bmatrix}1 & \omega^2\Delta t/2 \\ 0 & 1+\omega^2\beta(\Delta t)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\omega^2\Delta t/2 \\ \Delta t & 1-\omega^2(1/2-\beta)(\Delta t)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \quad (38)$$

的特征值（两个方程共有两个特征值）的绝对值必须小于1。建立特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & (\omega^2\Delta t/2)(\lambda+1) \\ -\Delta t & \{1+\omega^2\beta(\Delta t)^2\}\lambda-1+\omega^2(1/2-\beta)(\Delta t)^2\end{vmatrix}=0,$$

展开整理后得下式：

$$\lambda^2+\frac{-2-2\,\omega^2\beta(\Delta t)^2+\omega^2(\Delta t)^2}{1+\omega^2\beta(\Delta t)^2}\lambda+1=0.$$

由于这个二次方程中λ^2的系数和常数项均为1，两根的积为1，因此，若有不同的实根，且其中一个根大于1，为了使$|\lambda|\leqslant 1$，则判别式$[(\lambda\text{的系数})^2-4]$必须为0或为负。展开整理后得稳定条件如下：

$$\omega^2(\Delta t)^2(1-4\,\beta)\leqslant 4. \quad (39)$$

因此，

1）若$\beta\geqslant 1/4$，无条件稳定。

2）即使$\beta<1/4$，只要$\Delta t\leqslant 2/(\omega\sqrt{1-4\,\beta})$，也稳定。

3）除上述情况外，解不稳定。

因为线性加速度法相当于$\beta=1/6$的情况，虽然不是无条件稳定，但若取$\Delta t\leqslant 2\sqrt{3}/\omega$，则解是稳定的，它比起同一情况的显式来（$\beta=0$），$\Delta t$也只大$\sqrt{3}$倍。

可是，只提加上反馈还不够，反馈的方式不同、程度不同，效果也不同。众所周知，根据数学研究的结果，在线性加速度法中采用的那种反馈，即不顾高频率的大小而任意选择Δt的作法，仍得不到很好的稳定效果（参考以上注解）。

相反，大家知道，在威尔逊θ法中，只要θ值取1.37以上，不管Δt取怎样的值都是稳定的（即这种算法是无条件稳定的）。当然，Δt过大，精度要降低，但只要不发散，就可根据经验和工程常识判断，灵活掌握。例如，Δt取结构物基本周期（最长

的固有周期）的 1% 左右即可得到相当满意的结果。

因此，威尔逊 θ 法是实用价值很高的出色的解法，虽然由于增加了参数 θ，看起来式子稍复杂一些，但计算工作量与线性加速度法和纽马克 β 法差不多。

显然，θ 的取值小于 1.37 就意义不大，但并不是说 θ 的取值只要在 1.37 以上，不管多大都可以。实际上，θ 最好不要太大，否则精度下降（截断误差增加）。由于在 θ 法中执行如下计算：

假定在区间 $[t, t+\theta\Delta t]$ 加速度线性变化，

在此假定下计算 $\ddot{u}(t+\theta\Delta t)$，

在 $\ddot{u}(t+\theta\Delta t)$ 和 $\ddot{u}(t)$ 之间线性内插 $\ddot{u}(t+\Delta t)$。

因此作为极端的例子，若取 $\Delta t=0.01$ 秒，$\theta=3\times10^{10}$，就意味着假定此后十年内加速度均为线性变化，且据十年后的加速度来计算 0.01 秒后的状态。这样的不合理情况当然精度是很差的，即使 $\theta=2$，误差已相当显著，因此，威尔逊推荐的合理 θ 值为 1.4[1)]。

计算步骤

对微分方程式

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$$

的计算步骤归纳如下：当仿真进行到时刻 t，已知 $\boldsymbol{u}(t)$，$\dot{\boldsymbol{u}}(t)$ 求 $\boldsymbol{u}(t+\Delta t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)$ 的计算式为：

按"直接解法-1"的方式计算：

$$1)\quad \ddot{\boldsymbol{u}}(t+\theta\Delta t)=\left\{M+\frac{\theta\Delta t}{2}C+\frac{(\theta\Delta t)^2}{6}K\right\}^{-1}\Big[\boldsymbol{f}(t+\theta\Delta t)-C\left\{\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\right\}-K\left\{\boldsymbol{u}(t)+\theta\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\frac{(\theta\Delta t)^2}{3}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\right\}\Big], \qquad (40\text{a})$$

1) R. W. Clough and K. J. Bathe: Finite Element Analysis of Dynamic Response, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, UAH press (1972).

2) $\ddot{u}(t+\Delta t)=\{(\theta-1)\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\theta\Delta t)\}/\theta$; (40 b)

3) $\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+\Delta t\{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)\}/2$,

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+(\Delta t)^2\ddot{u}(t)/3+$$
$$+(\Delta t)^2\ddot{u}(t+\Delta t)/6. \qquad (40\text{ c})$$

按"直接解法二"的方式计算：

1) $$u(t+\theta\Delta t)=\left\{K+\frac{3}{\theta\Delta t}+\frac{6}{(\theta\Delta t)^2}M\right\}^{-1}\left[M\left\{2\ddot{u}(t)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{6}{\theta\Delta t}\dot{u}(t)+\frac{6}{(\theta\Delta t)^2}u(t)\right\}+C\left\{\frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}(t)+2\dot{u}(t)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{\theta\Delta t}u(t)\right\}+f(t+\theta\Delta t)\right]^{1)}; \qquad (41\text{ a})$$

2) $$\ddot{u}(t+\theta\Delta t)=\frac{6}{(\theta\Delta t)^2}\{u(t+\theta\Delta t)-u(t)\}-\frac{6}{\theta\Delta t}\dot{u}(t)-$$
$$-2\ddot{u}(t); \qquad (41\text{ b})$$

3) $\ddot{u}(t+\Delta t)=\left(1-\frac{1}{\theta}\right)\ddot{u}(t)+\frac{1}{\theta}\ddot{u}(t+\Delta t)$; (41 c)

4) $\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+(\Delta t/2)\{\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)\}$; (41 d)

5) $u(t+\Delta t)=u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+(\Delta t)^2\{2\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t)\}/6$. (41 e)

通常流行的威尔逊方法是后一组公式。

程序 2.3 威尔逊 θ 法

子程序与程序 2.1 通用，使用方法也与程序 2.1 相同。

```
      SUBROUTINE LAM(M,C,K,U,UD,N,NN,H,TSTART,TEND)
      REAL M,K
      DIMENSION M(NN,NN),C(NN,NN),K(NN,NN),U(NN),UD(NN)
     1,A(50,50),F(50),P(50),Q(50),R(50),U2D(50)
      NA=50
C     CALCULATION OF U2D(TSTART)
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
    1 A(I,J)=M(I,J)
      CALL DECOMP(A,N,NA)
```

1) 原文没有等号右边方括号内的最后一项 $f(t+\theta\Delta t)$。——译注

```
      CALL EXCITE(F,TSTART,N)
      DO 2 I=1,N
      R(I)=F(I)
      DO 2 J=1,N
    2 R(I)=R(I)-C(I,J)*UD(J)-K(I,J)*U(J)
      CALL SOLVE(A,R,N,NA)
C     CONSTANTS
      C1=H/2.0
      C2=H*H/6.0
      C3=H*H/3.0
      TH=1.4
      G=H*TH
      G1=G/2.0
      G2=G*G/6.0
      G3=G*G/3.0
      PP=1.0-1.0/TH
      QQ=1.0/TH
      DO 3 I=1,N
      DO 3 J=1,N
    3 A(I,J)=M(I,J)+G1*C(I,J)+G2*K(I,J)
      CALL DECOMP(A,N,NA)
C     CLOCK
      LAST=(TEND-TSTART)/H+1.0
      DO 10 L=1,LAST
      T=TSTART+FLOAT(L-1)*H
      DO 5 I=1,N
    5 U2D(I)=R(I)
      CALL EXCITE(F,T,N)
      WRITE(6,6) T,(U(I),UD(I),U2D(I),F(I),I=1,N)
    6 FORMAT(3H T=,E15.7/500(1H ,3E15.7,3X,E15.7/))
C     CALCULATION OF U2D(T+H)
      DO 7 I=1,N
      P(I)=UD(I)-G1*U2D(I)
    7 Q(I)=U(I)-G*UD(I)+G3*U2D(I)
      DO 8 I=1,N
```

```
      R(I)=P(I)
      DO 8 J=1,N
    8 R(I)=R(I)-C(I,J)*P(J)-K(I,J)*Q(J)
      CALL SOLVE(A,R,N,NA)
      DO 11 I=1,N
   11 R(I)=U2D(I)*PP+R(I)*QQ
C     CALCULATION OF U(T+H) AND UD(T+H)
      DO 9 I=1,N
      U(I)=U(I)+H*UD(I)+C3*UD(I)+C2*R(I)
    9 UD(I)=UD(I)+C1*(U2D(I)+R(I))
C     CONTINUE
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
```

§ 2.5 侯博特法

这是侯博特为飞机振动分析提出的方法[1)]，它与上述方法同样具有无条件稳定的特点。这方法是假定在

$$u(t-2\Delta t),\ u(t-\Delta t),\ u(t),\ u(t+\Delta t)$$

的范围内 u 值可用三次式近似，即通过这四个点建立三次式，微分两次求 $\ddot{u}$，对 $\ddot{u}$ 从时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$ 积分一次和积分二次算出 $\dot{u}(t+\Delta t)$和 $u(t+\Delta t)$。

因为 u 为三次式，则 $\dot{u}$ 应为二次式，$\ddot{u}$ 应为一次式。它与线性加速度法、β 法及 θ 法相同之处是都设加速度为一次式，而本法的突出优点是能保持所经过的点具有光滑的连续性，并可得到稳定解。

基本公式表示如下：

---

1) J. C. Houbolt, A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft, JAS 17 (1950).

$$\left\{M+\frac{11}{12}\Delta tC+\frac{1}{2}(\Delta t)^2K\right\}\boldsymbol{u}(t+\Delta t)$$

$$=\frac{1}{2}(\Delta t)^2\boldsymbol{f}(t+\Delta t)+\left(\frac{5}{2}M+\frac{3}{2}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t)-\left(2M+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t-\Delta t)+\left(\frac{1}{2}M+\frac{1}{6}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t-2\Delta t). \tag{42}$$

与前面的方法情况相同，可按直接法或迭代法解。若用直接法，由上式解得 $u(t+\Delta t)$ 为

$$\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\left\{M+\frac{11}{12}\Delta tC+\frac{1}{2}(\Delta t)^2K\right\}^{-1}\left\{\frac{1}{2}(\Delta t)^2\boldsymbol{f}(t+\Delta t)+\right.$$

$$+\left(\frac{5}{2}M+\frac{3}{2}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t)-\left(2M+\frac{3}{4}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t-\Delta t)+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}M+\frac{1}{6}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t-2\Delta t)\right\}. \tag{43}$$

若用迭代法，可将式（42）变成

$$\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=M^{-1}\left[-\left\{\frac{11}{12}\Delta tC+\frac{1}{2}(\Delta t)^2K\right\}\boldsymbol{u}(t+\Delta t)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\boldsymbol{f}(t+\Delta t)+\left(\frac{5}{2}M+\frac{3}{2}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t)-$$

$$-\left(2M+\frac{3}{4}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t-\Delta t)+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}M+\frac{1}{6}\Delta tC\right)\boldsymbol{u}(t-2\Delta t)\right]. \tag{44}$$

将 $\boldsymbol{u}(t+\Delta t)$ 的第 k 次近似值代入式子右边，并以此结果作为第 $k+1$ 次近似值。

现简单说明公式（42）的推导方法（这里按一个变量的形式推导，多变量的情况相仿）。首先，可用拉格朗日插值公式[1]建

1）一般地，通过 $n+1$ 点 $u_i=u(t_i)$（$i=0,1,\cdots,n$）的 n 次式为：

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)}u_i,$$

只要将 $t=t_i$ 代入上式就有 $p(t_i)=u_i$，即可证明上式是正确的[$p(t)$为t的n次式，符合上述条件的n次式是唯一的]。

立通过四点的三次式：

$$p(\tau)=\frac{\{\tau-(t-\Delta t)\}(\tau-t)\{\tau-(t+\Delta t)\}u(t-2\Delta t)}{\{(t-2\Delta t)-(t-\Delta t)\}\{(t-2\Delta t)-t\}\{(t-2\Delta t)-(t+\Delta t)\}}+$$

$$+\frac{\{\tau-(t-2\Delta t)\}(\tau-t)\{\tau-(t+\Delta t)\}u(t-\Delta t)}{\{(t-\Delta t)-(t-2\Delta t)\}\{(t-\Delta t)-t\}\{(t-\Delta t)-(t+\Delta t)\}}+$$

$$+\frac{\{\tau-(t-2\Delta t)\}\{\tau-(t-\Delta t)\}\{\tau-(t+\Delta \tau)\}u(t)}{\{t-(t-2\Delta t)\}\{t-(t-\Delta t)\}\{t-(t+\Delta t)\}}$$

$$+\frac{\{\tau-(t-2\Delta t)\}\{\tau-(t-\Delta t)\}(\tau-t)u(t+\Delta t)}{\{(t+\Delta t)-(t-2\Delta t)\}\{(t+\Delta t)-(t-\Delta t)\}\{(t+\Delta t)-t\}}.$$

若设

$$s=(\tau-t)/\Delta t,\quad u_j=u(t+j\Delta t),$$

上式简化为

$$p(s)=\frac{(s+1)s(s-1)}{(-1)(-2)(-3)}u_{-2}+\frac{(s+2)s(s-1)}{1\cdot(-1)(-2)}u_{-1}+$$

$$+\frac{(s+2)(s+1)(s-1)}{2\cdot1\cdot(-1)}u_0+\frac{(s+2)(s+1)s}{3\cdot2\cdot1}u_1$$

$$=\frac{s^3-s}{-6}u_{-2}+\frac{s^3+s^2-2s}{2}u_{-1}+\frac{s^3+2s^2-s-2}{-2}u_0+$$

$$+\frac{s^3+3s^2+2s}{6}u_1. \tag{45}$$

它是 u 的近似式。微分一次得 $\dot{u}$，即

$$\dot{p}(s)=\frac{3s^2-1}{-6}u_{-2}+\frac{3s^2+2s-2}{2}u_{-1}+$$

$$+\frac{3s^2+4s-1}{-2}u_0+\frac{3s^2+6s+2}{6}u_1.$$

令 $s=1$ 代入上式有

$$\frac{1}{\Delta t}\dot{u}(t+\Delta t) \cong \dot{p}(1) = \left(-\frac{1}{3}\right)u_{-2} + \frac{3}{2}u_{-1} - 3u_0 + \frac{11}{6}u_1. \tag{46}$$

同理，令 $s=1$ 代入下式

$$\ddot{p}(s) = \frac{6s}{-6}u_{-2} + \frac{6s+2}{2}u_{-1} + \frac{6s+4}{-2}u_0 + \frac{6s+6}{6}u_1,$$

求得

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}\ddot{u}(t+\Delta t) \cong \ddot{p}(1) = (-1)u_{-2} + 4u_{-1} - 5u_0 + 2u_1. \tag{47}$$

将上式代入下式：

$$m\ddot{u}(t+\Delta t) + c\dot{u}(t+\Delta t) + ku(t+\Delta t) = f(t+\Delta t),$$

两边同乘$(\Delta t)^2/2$ 得

$$m\left(u_1 - \frac{5}{2}u_0 + 2u_{-1} - \frac{1}{2}u_{-2}\right) + \Delta t c\left(\frac{11}{12}u_1 - \frac{3}{2}u_0 + \frac{3}{4}u_{-1} - \frac{1}{6}u_{-2}\right) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 k u_1 = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 f(t+\Delta t). \tag{48}$$

把上式整理置换后的多变量公式就是式(42)。

在侯博特法中，只对 u 值进行计算，式中不出现 $\dot{u}$ 和 $\ddot{u}$，如果要求 $\dot{u}$ 和 $\ddot{u}$，可按式(46)、(47)计算。

本法在开始计算时要用到前几个时刻的值 $u(t-\Delta t)$，$u(t-2\Delta t)$，这些值必须先按其他公式算出。关于具体方法可参考前述程序例。

程序 2.4 侯博特法

使用方法与程序2.1相同。用户自己编制计算初值 U 0，U 1，U 2 的子程序STARTR，如果开始是静止的，U 0，U 1，U 2 也可用相同的U值代入(如简化子程序所示)。为了能在龙格-库塔法等方法中使用，将M，C，K等作为独立参数引入

```
      SUBROUTINE HUBOLT(M,C,K,U,V,N,T0,TEND,DT)
C     HOUBOLT METHOD,SMALL SIZE VERSION,CONSTANT COEFFI-
C       CIENT
```

```
C     M*U(T)+C*U(T)+K*U(T)=P(T)
      REAL M,K
      DIMENSION M(9,9),C(9,9),K(9,9),A 1(9,9),A 2(9,9),A 3(9,9)
     1,A 4(9,9),U 2(9),U 1(9),U0(9),X(9),A(9,9),B(9),F(9),U(9),V(9)
      L=9
 1000 P 1=DT*11.0/12.0
      P 2=DT*DT*0.5
      P 3=2.5
      P 4=DT*1.5
      P 5=2.0
      P 6=DT*0.75
      P 7=0.5
      P 8=DT/6.0
C
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      A 1(I,J)=P 1*C(I,J)+P 2*K(I,J)+M(I,J)
      A 2(I,J)=P 3*M(I,J)+P 4*C(I,J)
      A 3(I,J)=P 5*M(I,J)+P 6*C(I,J)
      A 4(I,J)=P 7*M(I,J)+P 8*C(I,J)
    1 CONTINUE
C
      T=TU
      CALL STARTR(U 2,U 1,U 0,U,V,N,M,C,K,L,T)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,66) T,(U0(I),I=1,N)
   66 FORMAT(1H  ,8 E 15.7,/1 H  ,15 X,2 E 15.7)
      T=T+DT
      IF(T.GE.TEND) RETURN
      CALL FNP 1(T,F)
C
      DO 2 I=1,N
      S=F(I)*P 2
      DO 3 J=1,N
```

```
      S=S-A2(I,J)*U0(J)-A3(I,J)*U1(J)+A4(I,J)*U2(J)
    3 CONTINUE
      X(I)=S
    2 CONTINUE
C
      DO 4 I=1,N
      DO 5 J=1,N
      A(I,J)=A1(I,J)
    5 CONTINUE
    4 CONTINUE
      CALL GG2(A,X,N)
      DO 6 I=1,N
      U2(I)=U1(I)
      U1(I)=U0(I)
      U0(I)=X(I)
    6 CONTINUE
      GO TO 100
      END

      SUBROUTINE GG2(A,X,N)
      DIMENSION A(N,N),X(N)
      IF(N.EQ.1) GO TO 5
      DO  K=1,N-1
      P=A(K,K)
      DO 2 J=K,N
    2 A(K,J)=A(K,J)/P
      X(K)=X(K)/P
      DO 3 I=K+1,N
      Q=A(I,K)
      DO 4 J=K+1,N
    4 A(I,J)=A(I,J)-Q*A(K,J)
    3 X(I)=X(I)-Q*X(K)
      X(N)=X(N)/A(N,N)
      DO 1 L=1,N-1
      K=N-L
      KPLUS1=K+1
```

```
  DO 1 I=1,K
1 X(I)=X(I)-X(KPLUS1)*A(I,KPLUS1)
  RETURN
5 X(1)=X(1)/A(1,1)
  RETURN
  END
```

[计算初值的简化子程序]

```
  SUBROUTINE STARTR(U2,U1,U0,U,V,N,M,C,K,L,T)
  DIMENSION U2(9),U1(9),U0(9),U(9),V(9),M(9,9),C(9,9), K(9,9)
  DO 1 I=1,N
  U2(I)=U(I)
  U1(I)=U(I)
  U0(I)=U(I)
1 CONTINUE
  RETURN
  END
```

计算强迫振动项的子程序]

```
  SUBROUTINE FNP1(T,F)
  F=0.1*SIN(2.0*T)
  RETURN
  END
```

§ 2.6 龙格-库塔法

最后简单介绍一下在常微分方程初值问题中广泛使用的龙格-库塔法。虽然它不是绝对稳定而必须将 Δt 取得很小，但由于精度好(截断误差小)，振动分析中也常采用。

它本是一阶微分方程式

$$\dot{u}=\varphi(t,\ u)$$

的解法，计算式为[1]

$d_1=\Delta t\varphi(t,\ u(t))$,

1) 关于数值例子、程序和误差分析参阅：一松信、户川隼人，計算機のための数值計算法(新曜社)。

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \Delta t\varphi(t+\Delta t/2,\ u(t)+d_1/2),\\
d_3 &= \Delta t\varphi(t+\Delta t/2,\ u(t)+d_2/2),\\
d_4 &= \Delta t\varphi(t+\Delta t,\ u(t)+d_3),\\
u(t+\Delta t) &= u(t)+(d_1+2d_2+2d_3+d_4)/6.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

一阶微分方程组也可同样处理。

关于这个公式的理论推导颇费篇幅，这里省略[1]。因为$u(t+\Delta t)$是用u在t点展开的台劳级数的前四项合并建立的公式，比起以前介绍的公式[其基本形式是式（20），只限于台劳展开式的前二次项]来精度高且计算程序简单，大家喜欢使用。

此公式应用于振动问题

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$$

时，令 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{u}}$，变换为一阶微分方程组

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{v},\\
\dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}),
\end{aligned}
$$

按以下要点计算：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}(t),\\
&\boldsymbol{v}_0=\dot{\boldsymbol{u}}(t),\\
&\boldsymbol{d}_1=\Delta t\boldsymbol{v}_0,\\
&\boldsymbol{e}_1=\Delta t\boldsymbol{M}^{-1}\{\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_0\},\\
&\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_0+(1/2)\boldsymbol{d}_1,\\
&\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_0+(1/2)\boldsymbol{e}_1,\\
&\boldsymbol{d}_2=\Delta t\boldsymbol{v}_1,\\
&\boldsymbol{e}_2=\Delta t\boldsymbol{M}^{-1}\{\boldsymbol{f}(t+\Delta t/2)-\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_1\},\\
&\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_0+(1/2)\boldsymbol{d}_2,\\
&\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_0+(1/2)\boldsymbol{e}_2,\\
&\boldsymbol{d}_3=\Delta t\boldsymbol{v}_2,\\
&\boldsymbol{e}_3=\Delta t\boldsymbol{M}^{-1}\{\boldsymbol{f}(t+\Delta t/2)-\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_2\},
\end{aligned}
$$

1）参考数值计算教科书，例如：宇野利雄，計算機のための数値計算（朝倉書店）。

$$\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{d}_3,$$
$$\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{d}_4=\Delta t\boldsymbol{v}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_4=\Delta t M^{-1}\{\boldsymbol{f}(t+\Delta t)-C\boldsymbol{v}_3-K\boldsymbol{u}_3\},$$
$$\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\boldsymbol{u}(t)+(1/6)(\boldsymbol{d}_1+2\boldsymbol{d}_2+2\boldsymbol{d}_3+\boldsymbol{d}_4),$$
$$\dot{\boldsymbol{u}}(t+\Delta t)=\dot{\boldsymbol{u}}(t)+(1/6)(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4),$$

$\boldsymbol{d}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的增量，$\boldsymbol{e}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的增量。

本解法属显式解法（虽然在 $t+\Delta t$ 时刻使用运动方程，但只是为了由 $\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{v}_3$ 计算 $\boldsymbol{e}_4$，因为这个 $\boldsymbol{e}_4$ 的数据不能由 $\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{v}_3$ 反馈计算，所以不能叫做隐式方法）。它与侯博特法不同，由于不用“过去的值”，使用较方便。

程序 2.5　MCK 型问题专用的龙格-库塔法

程序中标识符意义：U 为位移，V 为速度，TS，TE 为开始和终结的时间，DT，DP 为步长幅度和印刷时间间距。

```
      SUBROUTINE RK4M(M,C,K,U,V,N,TS,TE,DT,DP,NC)
      REAL M,K
      DIMENSION M(NC,NC),C(NC,NC),K(NC,NC),U(NC),V(NC)
     1,UU(100),VV(100),WW(100),SV(100),SW(100)
      NM1=N-1
      HT=DT/2.0
      H6=DT/6.0
      KP=DP/DT
      FK=0.0
      KS=(TE-TS)/DT+1.0
C
      CALL DECOMP(M,N,NC)
C
      DO 100 KAISU=1,KS
C
      T=TS+FK*DT
      FK=FK+1.0
C
```

```
      DO 1 I=1,N
      UU(I)=U(I)
      VV(I)=V(I)
    1 CONTINUE
C
      JD=1
      GO TO 200
C
  301 IF(MOD(KAISU,KP).NE.0)  GO TO 2
      WRITE(6,3)  T,(I,U(I),V(I),WW(I),I=1,N)
    3 FORMAT(1H0,E15.7,I5,3E15.7/100(1H  ,15X,I5,3E15.7/))
    2 CONTINUE
C
      DO 5 I=1,N
      UU(I)=U(I)+VV(I)*HT
      VV(I)=V(I)+WW(I)*HT
      SV(I)=VV(I)
      SW(I)=WW(I)
    5 CONTINUE
C
      T=T+HT
      JD=2
      GO TO 200

  302 DO 6 I=1,N
      UU(I)=U(I)+VV(I)*HT
      VV(I)=V(I)+WW(I)*HT
      SV(I)=SV(I)+2.0*VV(I)
      SW(I)=SW(I)+2.0*WW(I)
    6 CONTINUE
C
      JD=3
      GO TO 200
  303 DO 7 I=1,N
      UU(I)=U(I)+VV(I)*DT
```

```
      VV(I)=V(I)+WW(I)*DT
      SV(I)=SV(I)+2.0*VV(I)
      SW(I)=SW(I)+2.0*WW(I)
    7 CONTINUE
C
      T=T+HT
      ID=4
      GO TO 200
C
  304 DO 8 I=1,N
      U(I)=U(I)+(SV(I)+VV(I))*H6
      V(I)=V(I)+(SW(I)+WW(I))*H6
    8 CONTINUE
C
      GO TO 100
C
  200 CONTINUE
C
      DO 10 I=1,N
      WW(I)=0.0
      DO 11 J=1,N
      WW(I)=WW(I)-K(I,J)*UU(J)-C(I,J)*VV(J)
   11 CONTINUE
   10 CONTINUE
C
      DO 12 L=1,NM1
      WW(L)=WW(L)/M(L,L)
      LP1=L+1
      DO 13 I=LP1,N
      WW(I)=WW(I)-M(I,L)*WW(L)
   13 CONTINUE
   12 CONTINUE
C
      WW(N)=WW(N)/M(N,N)
C
```

```
      DO 14 LL=1,NM1
      L=N-LL
      LP1=L+1
      DO 15 J=LP1,N
      WW(L)=WW(L)-M(L,J)*WW(J)
   15 CONTINUE
   14 CONTINUE
C
      GO TO (301,302,303,304),ID
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
```

第三章　振型分解法

上一章介绍的仿真法是一种通用的方法，它的优点是可以用于任何类型的问题(例如，不论是 M，C，K 随时间变化的问题，还是没有奇点的非线性问题等都可以适用)。缺点是计算时间很长，而且不能预见一般规律(一个问题的解只表示对一个特定输入波形的响应)。

与此相反，对于形式为

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=f(t)$$

的方程，当式中 M，C，K 为常量矩阵(不随时间变化的矩阵)时，利用这类方程的数学特性，可以得到效率更高、预见性更好的方法。本章介绍有关的理论基础和具体方法。

§ 3.1　单自由度系统的精确解

第一章推导出的微分方程

$$M\ddot{u}+Ku=0, \tag{1}$$

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0, \tag{2}$$

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=f(t) \tag{3}$$

是二阶线性常系数微分方程，它总可以用解析方法求解。由于单自由度系统问题是多自由度系统的基础，所以首先介绍和复习单自由度系统的问题。

无阻尼自由振动

微分方程式

$$m\ddot{u}+ku=0 \tag{4}$$

有下面形式的解：

$$u=a\sin\omega t+b\cos\omega t, \tag{5}$$

式中，a 和 b 是任意常数；ω 是代数方程

$$m\mu=k \tag{6}$$

的根 μ 的平方根，即

$$\omega=\sqrt{\mu}=\sqrt{k/m}\text{。} \tag{7}$$

只须将式(5)微分两次代入式(4)，即可证明式(5)确是微分方程式(4)的解。反过来也可证明微分方程式(4)的解总可以表示为式(5)的形式[1]。

利用三角函数的和差化积公式，式(5)可以写成

$$u=a_1\cos(\omega t+\varphi_1), \tag{8}$$

或

$$u=a_2\sin(\omega t+\varphi_2). \tag{9}$$

它们与式(5)系数的关系为

$$\begin{aligned}
&a=-a_1\sin\varphi_1=a_2\cos\varphi_2,\\
&b=a_1\cos\varphi_1=a_2\sin\varphi_2,\\
&a_1=a_2=\sqrt{a^2+b^2},\\
&\varphi_1=\tan^{-1}(-b/a),\\
&\varphi_2=\tan^{-1}(a/b).
\end{aligned} \tag{10}$$

显然它们的物理意义为

ω 是角速度($\omega/2\pi$ 是频率)；

$a_1=a_2=\sqrt{a^2+b^2}$ 是振幅；

φ_1，φ_2 是相位角。

对于初始条件：

当 $t=0$ 时，$u=u(0)$，$\dot{u}=\dot{u}(0)$，

解得式(5)的系数为

$$a=\dot{u}(0),\ b=u(0)$$

[因使用式(5)比式(8)、(9)更方便，故优先使用]。

有阻尼振动

微分方程式

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0 \tag{11}$$

---

1) 见有关微分方程的教科书，例如：古屋茂，微分方程式入門（サイエンス社）。

有解[1]：

$$u=e^{-\alpha t}(a\sin\omega t+b\cos\omega t),\tag{12}$$

式中，a 和 b 是任意常数；α 和 ω 分别是代数方程

$$m\lambda^2+c\lambda+k=0\tag{13}$$

的根($\lambda=-\alpha+i\omega$)的实部反号和虚部。将式(12)微分后代入式(11)，即可证明它是微分方程(11)的解。

注：因

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},$$

式(12)也可写成：

$$u=c_1e^{\lambda t}+c_2e^{\bar{\lambda}t},$$

$$c_1=\frac{b}{2}+i\frac{a}{2},\quad c_2=\frac{b}{2}-i\frac{a}{2}.$$

微分上式有：

$$\dot{u}=\lambda c_1e^{\lambda t}+\bar{\lambda}c_2e^{\bar{\lambda}t}$$

$$\ddot{u}=\lambda^2c_1e^{\lambda t}+\bar{\lambda}^2c_2e^{\bar{\lambda}t}$$

代入式(11)后有

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=c_1e^{\lambda t}(m\lambda^2+c\lambda+k)+c_2e^{\bar{\lambda}t}(m\bar{\lambda}^2+c\bar{\lambda}+k)=0.$$

(注意，因为方程(13)各项系数为实数，若有根 λ，则也应有根 $\bar{\lambda}$。)

其次，可以证明微分方程(11)的解总可表示为式(12)的形式。对于初始条件：

$$t=0\text{ 时},\ u=u(0),\ \dot{u}=\dot{u}(0),$$

式(12)中的系数应为

$$a=\dot{u}(0),\ b=u(0).$$

强迫振动

微分方程式

$$m\ddot{u}+ku=f(t)\tag{14}$$

的解虽不能用初等函数表示，但用积分形式可得到精确解。即对

[1] 注意，其他教科书喜用符号 ω 表示$\sqrt{k/m}$(有阻尼振动时也是如此)，这里 ω 的意义则不同，望不要混淆。

于初始条件 $u(0)=0$，$\dot{u}(0)=0$ 有特解：

$$u_0(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \tag{15}$$

（式中 $\omega=\sqrt{k/m}$）。它再加上齐次方程式(4)的解式(5)，就得到式(15)的通解

$$u(t)=u_0(t)+\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t, \tag{15'}$$

式中 α，β 为任意常数，式(15)称为杜哈美(Duhamal)积分[1]。

可证明式(15)的 $u_0(t)$ 是方程式(14)的特解。利用三角函数的和角公式，式(15)可写成

$$\begin{aligned}u_0(t)&=\frac{1}{m\omega}\int_0^t f(\tau)(\sin\omega t\cos\omega\tau-\cos\omega t\sin\omega\tau)d\tau\\&=\frac{1}{m\omega}\Big\{\sin\omega t\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau d\tau-\\&\quad-\cos\omega t\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\Big\},\end{aligned}$$

微分后得

$$\begin{aligned}\dot{u}_0(t)&=\frac{1}{m\omega}\Big\{\omega\cos\omega t\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau d\tau+\\&\quad+\sin\omega t f(t)\cos\omega t+\omega\sin\omega t\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau d\tau-\\&\quad-\cos\omega t f(t)\sin\omega t\Big\}\\&=\frac{1}{m}\Big\{\cos\omega t\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau d\tau+\\&\quad+\sin\omega t\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}_0(t)&=\frac{1}{m}\Big\{-\omega\sin\omega t\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau d\tau+\\&\quad+\omega\cos\omega t f(t)\cos\omega t+\omega\cos\omega t\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau d\tau+\end{aligned}$$

1) 在数学书中，属于常系数线性非齐次方程的一般解法没有特别的名称。由于杜哈美(1797—1872)在结构力学中作为强迫振动的解法发表，故常用这个称呼。

$$-\sin\omega t f(t)\sin\omega t\Big\}$$

$$=-\frac{\omega^2}{m\omega}\Big\{\sin\omega t\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau d\tau-$$

$$-\cos\omega t\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\Big\}+f(t)/m,$$

将上两式分别乘以 k，m 相加后得到 $m\ddot{u}_0+ku_0=f(t)$。

共振

当用正弦波激振时，即

$$f(t)=a\cos pt,$$

若 $p\neq\omega$，解为

$$u_0(t)=\frac{1}{m}\frac{a}{\omega^2-p^2}(\cos pt-\cos\omega t); \tag{16}$$

若 $p=\omega$，解为

$$u_0(t)=\frac{at}{2m\omega}\sin\omega t. \tag{16'}$$

为了从式(15)导出式(16)，(16′)， 利用三角函数积化和差公式得

$$\cos p\tau\sin\omega(t-\tau)$$

$$=(1/2)\{\sin[p\tau+\omega(t-\tau)]-\sin[p\tau-\omega(t-\tau)]\}$$

$$=(1/2)\{\sin[(p-\omega)\tau+\omega t]-\sin[(p+\omega)\tau-\omega t]\},$$

将上式从 0 到 t 积分后得

$$\left[\frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos[(p-\omega)\tau+\omega t]}{p-\omega}+\frac{\cos[(p+\omega)\tau-\omega t]}{p+\omega}\right\}\right]_{\tau=0}^{t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)(\cos pt-\cos\omega t).$$

将上式代入式(15)得式(16)，$p=\omega$ 时，被积函数为 $(1/2)\{\sin\omega t-\sin(2\omega\tau-\omega t)\}$。前部分与 τ 无关，积分后为 $(t/2)\sin\omega t$，后半部的积分为 $(1/2\omega)\cos\omega t$。

对式(16)第一项括弧内应用三角函数和差化积公式可变换为

$$\cos pt-\cos \omega t=-2\sin\frac{p-\omega}{2}t\sin\frac{p+\omega}{2}t,$$

当$|p-\omega|$比$p+\omega$小得多时，它表示“振幅与$\sin[(p-\omega)t/2]$成比例的不断变化的正弦振动(其角速度为ω和p的平均值)”，这叫做合拍现象。

当$p=\omega$时，发生共振，振幅随时间增加而不断增大直到无限大。当然，这只是“数学模型”的特性，实际上并非如此。但共振时振幅非常大，常常是引起事故和破坏的原因。

这个ω(用2π除后的值)正是系统的自由振动频率（固有频率)，计算固有频率的重要性也在于此。对于设计者来说，与其说是关心共振发生时的情况，还不如说更关心的是如何避免发生共振。所以固有频率的计算是首要的。

有阻尼强迫振动

微分方程式

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f(t)$$

对于初始条件

$$u(0)=0,\quad \dot{u}(0)=0$$

有解：

$$u_0(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t f(\tau)e^{\alpha(t-\tau)}\sin \omega(t-\tau)d\tau,$$

加上齐次方程式的解[式(12)]得通解

$$u(t)=u_0(t)+e^{-\alpha t}(a\sin \omega t+b\cos \omega t),$$

式中，α和ω分别是代数方程(13)的根的实部反号和虚部($\lambda=-\alpha+i\beta$)；a和b是任意常数。事实上，利用和角公式，上式可变换为

$$u_0(t)=\frac{1}{m\omega}e^{\alpha t}\left\{\sin \omega t\int_0^t f(\tau)e^{-\alpha\tau}\cos \omega\tau d\tau-\right.$$

$$\left.-\cos \omega t\int_0^t f(\tau)e^{-\alpha\tau}\sin \omega\tau d\tau\right\},$$

微分后得

$$\dot{u}_0(t) = \alpha u + \frac{e^{\alpha t}}{m\omega}\left\{\omega \cos \omega t \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau + \right.$$

$$\left. + \omega \sin \omega t \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha\tau} \sin \omega\tau d\tau \right\}$$

（其余的项合併后消去）。再微分一次得

$$\ddot{u}_0(t) = \alpha \dot{u} + \alpha(\dot{u} - \alpha u) +$$

$$+ \frac{e^{\alpha t}}{m\omega}\left\{ -\omega^2 \sin \omega t \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau + \right.$$

$$+ \omega^2 \cos \omega t \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha\tau} \sin \omega\tau d\tau +$$

$$\left. + \omega \cos \omega t f(t) e^{-\alpha t} + \omega \sin \omega t f(t) e^{-\alpha t} \sin \omega t \right\}$$

$$= 2\alpha\dot{u} - \alpha^2 u - \omega^2 u + f(t)/m,$$

因此，

$$\ddot{u} - 2\alpha\dot{u} + (\alpha^2 + \omega^2)u = f(t)/m^{1)}.$$

式中，

$$-2\alpha = -(\lambda + \bar{\lambda}) = c/m;$$

$$\alpha^2 + \omega^2 = \lambda\bar{\lambda} = k/m.$$

于是有

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t).$$

将 $t=0$ 代入，显然有 $u(0)=0$，$\dot{u}(0)=0$。

高阶微分方程的情况

通常，常系数齐次线性微分方程式

$$a_n \frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0$$

有特解：

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t},$$

式中，$c_1, \cdots, c_n$ 是任意常数；$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是代数方程式

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

---

1) 原文误为 $\ddot{u} - 2\alpha\dot{u} + (\alpha^2 - \omega^2) - u = f(t)/m$。——译注

的根（n 次代数方程有 n 个根）。

§ 3.2 自由振动和特征值

对于多自由度系统可以得到大致与上述相同的结果，但还需引入特征值和特征向量的概念。

对微分方程式(1)的情况，代数方程式(6)变为下面关系式：

$$K\boldsymbol{x}=\lambda M\boldsymbol{x}. \tag{17}$$

若求得满足上式的数 λ 和向量 $\boldsymbol{x}$，则微分方程式(1)的解为

$$\boldsymbol{u}(t)=(a\sin\omega t+b\cos\omega t)\boldsymbol{x}, \tag{18}$$

式中，$\omega=\sqrt{\lambda}$；a，b 为任意常数。事实上，对式(18)微分一次和两次，有

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t)=\omega(a\cos\omega t-b\sin\omega t)\boldsymbol{x}, \tag{19}$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}(t)=-\omega^2(a\sin\omega t+b\cos\omega t)\boldsymbol{x}. \tag{20}$$

将上式代入式(1)，则有

$$M\ddot{\boldsymbol{u}}+K\boldsymbol{u}=(a\sin\omega t+b\cos\omega t)(-\omega^2M\boldsymbol{x}+K\boldsymbol{x})$$

$$=(-\lambda M\boldsymbol{x}+K\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}.$$

式(18)由两部分组成，括弧内表示随时间变化的规律，$\boldsymbol{x}$ 表示在空间振动的形态（称振型）。

随时间变化的规律也可写成式(8)、(9)、(10)的形式，总之是正弦振动，其振动频率为 $\omega/2\pi$。结构上各点以静平衡点为中心，按这频率和相同相位（也包括乘负系数的情况）作正弦振动，$\boldsymbol{x}$ 决定各点振幅（振幅的比率）。换言之，$\boldsymbol{x}$ 表示在振动的某一瞬间用结点位移表示的位移分布。

求满足式(17)的 λ 和 $\boldsymbol{x}$ 的问题称为广义特征值问题。关于它的数学性质和解法，以后顺次详细介绍，这里摘录其结论如下：满足式(17)的 λ 和 $\boldsymbol{x}$ 必然存在，且一般地有 n 组（这里，n 是自由度数，也可以说是向量 $\boldsymbol{u}$ 的维数），λ 是正数，$\boldsymbol{x}$ 是实向量。令它们为

$$\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} \quad (\text{它们有关系：} K\boldsymbol{x}_k = \lambda_k M\boldsymbol{x}_k)$$

于是

$$\boldsymbol{u}_k(t) = (a_k \sin\sqrt{\lambda_k}t + b_k \cos\sqrt{\lambda_k}t)\boldsymbol{x}_k \tag{21}$$

$(k=1,\cdots,n)$都是微分方程式(1)的解。这种形式的振动叫式(1)的固有振动(第 k 个固有振动)，其固有频率为$\sqrt{\lambda_k}/2\pi$，固有振型为 $\boldsymbol{x}_k$。微分方程式(1)的全解可表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \boldsymbol{u}_n, \tag{22}$$

微分方程式(1)的通解为

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t)\boldsymbol{x}_k, \tag{22'}$$

式中，$a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ 为任意常数。式(22)中的 $\boldsymbol{u}_k$ 称为 $\boldsymbol{u}$ 的第 k 个固有振动分量。

对于 $M\ddot{\boldsymbol{u}} + C\dot{\boldsymbol{u}} + K\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 的情况

用关系式

$$\mu^2 M\boldsymbol{z} + \mu C\boldsymbol{z} + K\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \tag{23}$$

代替式(6)和式(17)，若能求得满足这个关系式的数 μ 和向量 $\boldsymbol{z}$，则函数

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{\mu t}\boldsymbol{z} \tag{24}$$

仍为微分方程式(2)的解(虽然只是形式上的解)。事实上，对式(24)微分有

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \mu e^{\mu t}\boldsymbol{z},$$
$$\ddot{\boldsymbol{u}}(t) = \mu^2 e^{\mu t}\boldsymbol{z},$$

代入式(2)得

$$M\ddot{\boldsymbol{u}} + C\dot{\boldsymbol{u}} + K\boldsymbol{u} = e^{\mu t}(\mu^2 M\boldsymbol{z} + \mu C\boldsymbol{z} + K\boldsymbol{z}),$$

于是式(23)右边$=\boldsymbol{0}$.

之所以说式(24)是"形式上的解"，是因为一般情况满足式(23)的 μ 和(不为 $\boldsymbol{0}$ 的)$\boldsymbol{z}$ 是复数和复向量(这个情况以后详述)。

于是式(24)是复函数式，这不符合原来 $\boldsymbol{u}(t)$ 的物理意义（因为表示结点位移随时间变化的量应是实函数）。

然而，对于式(23)类型的问题有如下性质（这也将在以后详细说明）：若 μ 和 $\boldsymbol{z}$ 满足式(23)，则 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\boldsymbol{z}}$ 也满足式(23)。因此可构造一个向量

$$\boldsymbol{u}(t)=e^{\mu t}\boldsymbol{z}+e^{\bar{\mu} t}\bar{\boldsymbol{z}} \tag{25}$$

替换式(24)，这是实函数，与我们的假设一致。这样可设

$$\mu=\alpha+i\beta,\quad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y},$$

代入式(25)可证明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t)&=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})+\\&\quad+e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y})\\&=2\,e^{\alpha t}(\cos\beta t\cdot\boldsymbol{x}-\sin\beta t\cdot\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{26}$$

研究一下上式的物理意义，可知括号内表示正弦振动，$e^{\alpha t}$ 表示其振幅随时间的变化。实际上，如后所述，α 是负的，所以这是振幅按指数函数递减的衰减振动。更详细研究一下可以发现，虽然

$$\cos\beta t\cdot\boldsymbol{x}-\sin\beta t\cdot\boldsymbol{y}$$

也表示正弦振动，但与前述式(18)有显著的不同。设向量的分量分别为

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}.$$

对于 $k=1,\ \cdots,\ n$ 有

$$u_k=2\,e^{\alpha t}(x_k\cos\beta t-y_k\sin\beta t),$$

式中，

$$x_k=r_k\cos\varphi_k,\quad y_k=r_k\sin\varphi_k.$$

即如果假设

$$\varphi_k=\tan^{-1}(y_k/x_k),\qquad r_k=\sqrt{x_k^2+y_k^2}, \tag{27}$$

有

$$u_k = 2r_k e^{\alpha t}(\cos\varphi_k \cos\beta t - \sin\varphi_k \sin\beta t)$$
$$= 2r_k e^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi_k). \tag{28}$$

一般说来，对于按式(26)发生的振动，当 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 取不同的值时，不仅振幅有不同的值且相位也因各结点各位移分量而不同，它们的值由式(27)给出。这是理解复向量 z 的意义的重要之点。

求满足式(23)的 μ 和 z 的问题也是"广义特征值问题"的一种。本书为区别这两类问题，称式(17)为"MK 型问题"，式(23)为"MCK 型问题"。关于它的数学性质和解法，以后详细说明，这里先摘录几个结论：满足式(23)的 λ 和 z 一定存在，且一般有 n 组共轭对，设它们为

$$\mu_1 \quad \bar{\mu}_1 \quad \mu_2 \quad \bar{\mu}_2 \quad \cdots \quad \mu_n \quad \bar{\mu}_n$$
$$z_1 \quad \bar{z}_1 \quad z_2 \quad \bar{z}_2 \quad \cdots \quad z_n \quad \bar{z}_n,$$

则

$$u_k(t) = e^{\mu_k t} z + e^{\bar{\mu}_k t}\bar{z} \tag{29}$$

$(k=1, \cdots, n)$都是微分方程式(2)的解。这种振动称为系统(2)的固有振动(第 k 固有振动)。其固有频率为 $\beta_k/2\pi$（这里 β_k 是 μ_k的虚部)。其固有振型可表示为式(26)和(28)。微分方程式(2)的全解可用 u_k(式 29)的线性组合表示：

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n. \tag{30}$$

式(30)第 k 项 $c_k u_k$ 称为 u 的第 k 固有振动分量。

关于强迫振动问题也可以用解析的方法解决，我们把它放到最后讨论（参考 p. 107)。下边介绍多自由度系统振动分析的基础——特征值问题，特别着重介绍广义特征值问题。

§ 3.3 标准特征值问题

对已知的方形矩阵(设它的行数＝列数＝n)可求得数值 λ 和非零向量 x (n维)使满足

$$Ax = \lambda x, \tag{31}$$

这样的问题叫做**标准特征值问题**。称满足式(31)的 λ 为 A 的**特征值**，x 为 A 的**特征向量**。

例 3.1　作为最简单的例子，试研究

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

的情况。如果 x 选得不恰当，式(31)就不能成立，例如设 $x=[1,0]^T$，则不论 λ 取任何值，将有

$$Ax=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\neq\lambda x,$$

然而对于特定的 x，式(31)成立。事实上，对于这个问题有

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},$$

所以 A 的特征值为 2，特征向量为 $[1\ \ -1]^T$。

同样有

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},$$

所以，$\lambda=0$　$x=[1\ \ 1]^T$ 也是本问题的答案。

特征方程式

将式(31)移项后可写成

$$(A-\lambda I)x=\mathbf{0}, \tag{32}$$

I 是单位矩阵，

$$I=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

式(32)表明：矩阵 $(A-\lambda I)$ 乘以非零向量 x 后其积为 $\mathbf{0}$。可是，我们知道，若要此式成立，除非矩阵 $(A-\lambda I)$ 的行列式的值

为 0[1]。因此，要使式(31)成立必须有

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \quad (33)$$

相反，若能求得满足式(33)的 λ，用这个 λ 建立矩阵 $B=A-\lambda I$，解联立一次方程 $Bx=0$ [即式(32)]，求得非零解 x，则这个 x 便是 A 的特征向量，λ 是 A 的特征值。

展开式(33)的行列式，按 λ 整理，得 λ 的 n 次多项式

$$P(\lambda)=c_n\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0, \quad (34)$$

称为特征值问题(31)的**特征多项式**。若用它置换式(33)的左边，得 n 次代数方程

$$c_n\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0=0, \quad (35)$$

这式称为特征值问题(31)的**特征方程式**。

一般地，n 次代数方程式有 n 个根[2]，因此式(34)有 n 个根，式(33)也有 n 个根。所以，n 阶特征值问题有 n 个特征值。

但是，在上述所谓"n 个"特征值中，若特征方程有重根，则 p 重根算为 p 个。对应于特征方程的重根的特征值称重特征值。若为 p 重根，称重复度为 p。对现在的问题，p 重根的意义是当把式(18)的 $P(\lambda)$ 分解因式

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

则有 p 个相同的项(即上述的 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 有 p 个相同)。

例 3.2　研究与上例相同的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

它的特征多项式为

---

1) 可能多数读者还记得：常数项为 0 的联立一次方程式 $Bx=0$ 具有非零解的必要条件是其系数矩阵行列式的值 $\det(B)$ 必须为零。

2) 参阅代数教科书，例如：高木貞治，代数学講義(共立出版)。

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=\lambda^2-2\lambda,$$

特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda=0,$$

其根为

$$\lambda=2 \quad 和 \quad \lambda=0.$$

把其中的 $\lambda=2$ 代入式(32)得

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即联立一次方程：

$$-x_1-x_2=0,$$
$$-x_1-x_2=0,$$

它有不定解。一般对于式(32)类型的方程，解是不定的（即有无限多个解），但可求得其分量间的关系。对于本例，由上式得到

$$x_2=-x_1,$$

即对任意常数 a，向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

是本问题（相应于特征值 $\lambda=2$）的特征向量。同理可知，相应于 $\lambda=0$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix},$$

a 为任意常数。

复数特征值

代数方程式的根往往为复数（一般地说，代数方程存在复数根，只有特殊情况才只有实数根）。因为特征值是特征方程的根，所以特征值往往也是复数。复数的特征值称为**复特征值**（同样，实数的特征值称为**实特征值**）。其相应的特征向量也为**复特征向量**。

然而，对于实矩阵，特征方程式的系数为实系数［因为是式(33)的展开式］。实系数的代数方程式有下述性质：若 λ 为根，则其共轭复数 $\bar{\lambda}$ 也为方程的根。因此，对实矩阵，若 λ 为特征值，则 $\bar{\lambda}$ 也为其特征值。而且，若对应于 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则对应于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量是 $\boldsymbol{x}$ 的共轭复向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$。事实上，若令

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},$$

$$\lambda=\alpha+i\beta,\ (\alpha,\ \beta\ \text{为实数})$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b},\ (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\ \text{为实向量})$$

则

$$A(\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b})=A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$
$$=(\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b})+i(\beta\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}),$$

$$A\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b},$$

$$A\boldsymbol{b}=\beta\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}.$$

因此

$$A\bar{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{a}-iA\boldsymbol{b}$$
$$=(\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b})-i(\beta\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b})$$
$$=(\alpha-i\beta)(\boldsymbol{a}-i\boldsymbol{b})$$
$$=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}.$$

实对称矩阵的特性

前面所述关于特征值问题的性质是对一般情况的论述，其中 A 为任何矩阵(对称的、非对称的、实矩阵、复矩阵)。对这些性质无疑可以进行更深入广泛的研究，但这对振动分析用处不大，故本书省略。现在着重说明在振动分析中很重要的实对称矩阵特征值问题的特有性质，其中最重要的是：

若特征值为实数，则特征向量也为实数；

对应于不同特征值的特征向量正交；

可以由特征向量中选取正规的正交基底。

现依次说明如下。

据前述性质

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, \text{ 且 } A\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}},$$

容易证明第一个特性：实对称矩阵的特征值为实数。对上两式分别左乘 $\bar{\boldsymbol{x}}^T$ 和 $\boldsymbol{x}^T$ 有

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T A\boldsymbol{x}=\lambda\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{x}^T A\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^T\bar{\boldsymbol{x}}.$$

一般地，有

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{x}_i=\boldsymbol{x}^T\bar{\boldsymbol{x}}.$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq 0$，上式也不为零。又因为 A 对称，故

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}^T A\boldsymbol{x}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{x}_i x_j\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}x_i\bar{x}_j\\&=\boldsymbol{x}^T A\bar{\boldsymbol{x}},\end{aligned}$$

因此

$$\lambda=\bar{\lambda}.$$

这意味着 λ 为实数。若 A 和 λ 为实数，联立一次方程式（32）为实系数方程，因此其解也为实数，特征向量为实向量。

特征向量的正交性

当两个向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix} \tag{36}$$

之间有关系

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=0,$$

称 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 正交。换句话说，两正交向量分量的积之和为零：

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=0. \tag{36'}$$

用内积的符号可写为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\equiv\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}\equiv\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

所谓正交就是

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0.$$

这个定义是初等几何正交概念的自然延拓。

如前所述，对于特征值问题式(31)，一般有 n 个特征值（包括重根在内）和 n 个相应的特征向量。这些特征向量之间有下述重要性质：在对称矩阵的特征值问题中，相应于不同特征值的特征向量正交。用公式表示为，当

$$A=A^T \tag{i}$$

时，在式

$$A\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i, \tag{ii}$$

$$A\boldsymbol{x}_j=\lambda_j\boldsymbol{x}_j \tag{iii}$$

中，若

$$\lambda_i\neq\lambda_j, \tag{iv}$$

则

$$\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_j=0. \tag{v}$$

这可证明如下：在式(ii)的两边左乘 $\boldsymbol{x}_j^T$，式(iii)的两边左乘 $\boldsymbol{x}_i^T$，相减得[1)]

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{x}_j^TA\boldsymbol{x}_i= & \lambda_i\boldsymbol{x}_j^T\boldsymbol{x}_i \\ -)\ \boldsymbol{x}_i^TA\boldsymbol{x}_j= & \lambda_j\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_j \\ \hline 0\quad = & (\lambda_i-\lambda_j)\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_j \end{array}$$

因为 $\lambda_i\neq\lambda_j$，故必须

---

1) 一般地，有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}.$$

若 A 对称，则

$$\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=\boldsymbol{y}^TA\boldsymbol{x}$$

成立。

$$x_i^T x_j = 0.$$

证毕。

作为正交基底的特征向量[1)]

具有 n 个数值分量的特征向量

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

叫 n 维向量，全体 n 维向量的集合称 **n 维向量空间(简称 n 维空间)**。

在 n 维空间中，至多有 n 个相互正交的向量。若恰好找到 n 个正交向量：

$$x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n,$$

则 n 维空间的任意向量 v 可写成

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n. \ (\alpha_i \text{ 是数量}) \tag{37}$$

这样的向量组 $x_1, \cdots, x_n$ 称为**基底**。特别地，当这些基底相互正交时称**正交基底**。一般地，若 $x_1, \cdots, x_n$ 为正交基底，则将各向量扩大不同的倍数后

$$c_1 x_1 \quad c_2 x_2 \quad \cdots \quad c_n x_n$$

仍是正交基底。

特别地，使向量长度等于 1 的正交基底叫正规正交基底。即

$$c_i = 1/|x_i| \quad (i = 1, \ 2, \ \cdots, n) \tag{38}$$

这里 $|x_i|$ 表示向量 x_i 的长度：

$$|x_i| \equiv \sqrt{x^T x}. \tag{39}$$

乘上一数量使长度为 1 的调节方法叫正规化方法。

换言之，满足

$$x_i^T x_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{40}$$

---

1) 详见线性代数教科书，例如：茂木勇，線形代数入門(森北出版)。

的 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 组成的向量组是正规正交基底。

若 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是正交基底，则式(37)的 α_i 为

$$\alpha_i=\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{v}. \tag{41}$$

事实上，对式(37)左乘 $\boldsymbol{x}_i^T$，则

$$\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_n$$

因有式(40)的关系，故上式中除第 i 项以外全部为零，第 i 项为 α_i，于是得到式(41)。

如前所述，若矩阵对称，且特征方程无重根，则有 n 个不同的特征值：

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n$$

其相应的特征向量

$$\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n$$

相互正交，它是 n 维空间的正交基底。另一方面，当特征方程有重根时，问题稍许复杂一些，详细讨论请参考线性代数教科书。这里仅谈谈结论。若矩阵对称，当 λ 为 p 重根时，有 p 个相应于 λ 特征值的特征向量相互正交。

总之(不管有无重根)，只要矩阵对称，就可从它的特征向量中选取 n 个相互正交的向量。设

$$\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n$$

已经正规化(长度调节为 1)，则任意向量 $\boldsymbol{v}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n.$$

式中，$\alpha_i=\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{v}$。设 X 为 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 排列成的矩阵

$$X=[\boldsymbol{x}_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \boldsymbol{x}_n], \tag{42}$$

与此相应，设 Λ 为相应的特征值排列成的对角矩阵，即

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{43}$$

则下面关系式成立：

$$A = X\Lambda X^T. \tag{44}$$

事实上，汇总下式

$$\Lambda x_i = \lambda_i x_i, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

可表示为

$$\Lambda X = X\Lambda. \tag{45}$$

若两边右乘 X^{-1}，则

$$A = X\Lambda X^{-1},$$

因为[1]

$$X^{-1} = X^T, \tag{46}$$

将上式中 X^{-1} 换成 X^T，于是得到式(44)。

正定矩阵

在对称矩阵 A 两侧乘以向量，所得的形式

$$\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} = \boxed{\boldsymbol{v}^T}\ \boxed{A}\ \boxed{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j \tag{47}$$

称二次型。如果除零以外，不管对任何向量 $\boldsymbol{v}$，二次型均为正值：

$$\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} > 0, \tag{48}$$

则这样的矩阵 A 称为**正定矩阵**。

虽然有些文献也称满足下式的 A 为正定矩阵：

$$\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} \geq 0, \tag{49}$$

但严格说，这样的 A 应称为**非负定矩阵**以予区别。

正定矩阵的特征值总是正的。反之，使特征值总是正值的矩阵是正定的[2]。事实上，设对称矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n,$$

其相应的正规化特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n,$$

1）据式(40)和(42)有 $X^T X = I$，因此 $X^T = X^{-1}$，具有这种性质的矩阵叫正交矩阵。

2）可以用"特征值全是正值"来定义矩阵的正定，非对称矩阵的正定性质虽然也可按此论述，但本书省略。

如上所述，任意向量 v 可表示为

$$v=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n.$$

代入式(47)，利用特征向量正交性有

$$\begin{aligned} v^T A v &= (\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n)^T A(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j x_i^T A x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\lambda_j x_i^T x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_i, \end{aligned} \tag{50}$$

因此，若

$$\lambda_i>0\ \ (i=1,\cdots,n),$$

则

$$v^T A v>0. \tag{51}$$

另一方面，若 $\lambda_i\leqslant 0$，对于v，特别是当 $v=x_i$ 时，有 $v^T A v\leqslant 0$。所以，对于任意的 v，只有特征值为正时才有 $v^T A v>0$。关于非负定的情况也一样，即

$$\lambda_i\geqslant 0(i=1,\cdots,n)\leftrightarrow A \text{ 为非负定}. \tag{52}$$

乔勒斯基分解

对称正定矩阵可分解为三角矩阵的积

$$A=LL^T=U^T U \tag{53}$$

式中，L为左下三角矩阵，U为右上三角矩阵。上式称为 A 的乔勒斯基分解。

例 $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

这种分解通常是可能的。为了证明这点，下面说明已知 A，求 L 或 U 的计算方法。

计算 U 的方法：

1) $u_{11}=\sqrt{a_{11}}$;

2) $u_{1j}=a_{1j}/u_{11}\quad(j=2,\cdots,n)$;

3) 按 $i=2,\cdots,n$ 次序计算：

$$
\begin{cases}
u_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum\limits_{k=1}^{i-1}u_{ki}^2}, \\
u_{ij}=\left(a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{i-1}u_{ki}u_{kj}\right)\Big/u_{ii}\quad(j=i+1,\cdots,n).
\end{cases}
$$

上式移项后，可写成

$$a_{11}=u_{11}^2,$$

$$a_{1j}=u_{11}u_{1j}\quad(j=2,\cdots,n),$$

$$a_{ii}=\sum_{k=1}^{i}u_{ki}^2\quad(i=2,\cdots,n),$$

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{i}u_{ki}u_{kj}\quad(i=2,\cdots,n \text{ 且 } j=i+1,\cdots,n).$$

这恰好使得

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\
0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & u_{nn}
\end{bmatrix}.
$$

这就证明了所得 U 满足式(53)(注意，根据假定 $a_{ij}=a_{ji}$)。对于下述四种情况不能作上面的计算：

在步骤 1 中，$a_{11}<0$;

在步骤 2 中，$u_{11}=0$;

在步骤 3 中，根号内为负数；

在步骤 3 中，$u_{ii}=0$。

但我们知道关于正定矩阵，有[1]：

$$a_{ii}>0 \quad (i=1,\cdots,n);$$

$$a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2>0 \quad (i=2,\cdots,n),$$

因此不用担心。

程序 3.1　乔勒斯基分解

作矩阵 A 的乔勒斯基分解。将结果贮存在原来存贮 A 的单元(右半三角部分 U，它的转置为 L)

```
      SUBROUTINE UTUDEC(A, N, NA)
      DIMENSION A(NA,NA)
      A(1,1)=SQRT (A(1,1) )
      DO 1 J=2,N
1     A(1,J)=A(1,J)/A(1,1)
      DO 2 I=2,N
      S=A(I,I)
      IM1=I-1
      DO 3 K=1, IM1
3     S=S-A(K,I)**2
      A (I, I)=SQRT(S)
      IF (I. EQ. N) RETURN
      IP1=I+1
      DO 5 J=IP1, N
      S=A(I J)
      DO 6 K=1,IM1
6     S=S-A(K,I)*A(K, J)
5     A(I, J)=S/A(I,I)
2     CONTINUE
      STOP
      END
```

1) 参阅：ウエンドロフ，理論数值解析(サイエンス社)。

瑞雷(Rayleigh)商

用向量长度的平方除二次型的值叫瑞雷商：

$$R(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j}. \tag{54}$$

若 $\boldsymbol{x}$ 是 A 的特征向量，则 $R(\boldsymbol{x})$ 是相应于 $\boldsymbol{x}$ 的特征值。实际上，若 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\lambda.$$

即使 $\boldsymbol{x}$ 不是特征向量本身，只要它相当接近特征向量，$R(\boldsymbol{x})$ 也将是相当好的近似特征值。这在实用上是很重要的(在第四章详细说明)。

$\boldsymbol{x}$ 发生变化，则 $R(\boldsymbol{x})$ 有不同的值。当 A 为正定对称矩阵时，关于所有 $\boldsymbol{x}$ 的 $R(\boldsymbol{x})$ 的最小值为 A 的最小特征值，$R(\boldsymbol{x})$ 的最大值为 A 的最大特征值。即对于任何 $\boldsymbol{x}$ 有

$$\lambda_{\min}\leqslant R(\boldsymbol{x})\leqslant\lambda_{\max}, \tag{55}$$

则

$$\min_{\boldsymbol{x}} R(\boldsymbol{x})=\lambda_{\min},\quad \max_{\boldsymbol{x}} R(\boldsymbol{x})=\lambda_{\max}. \tag{56}$$

事实上，设由特征向量选择的正交基底为

$$\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n,$$

相应的特征值为

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n,$$

若设 $\boldsymbol{x}$ 为

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n,$$

则

$$R(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\lambda_j\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_j}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_j}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \lambda_{min}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \lambda_{min}.$$

关于 λ_{max} 也可同样证明。

* * *

此外，关于标准特征值还有若干重要性质，在必要时再加以说明。现暂时转入下一个课题。

§ 3.4 广义特征值问题

已知两个方形矩阵M，K（设行数＝列数＝n），求满足

$$Kx = \lambda Mx \tag{57}$$

的数λ和非零向量x的问题，在本书中[1]称为**MK型特征值问题**。对于已知三个方阵M，C，K，求满足

$$\mu^2 Mx + \mu Cx + Kx = 0 \tag{58}$$

的数值μ和非零向量x的问题，本书称**MCK型特征值问题**。这两种特征值问题在振动分析中是极为重要的。理论上可研究更一般的情况，即对于已知的 $m+1$ 个矩阵

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_m,$$

求满足

$$A_0x + \lambda A_1x + \lambda^2 A_2x + \cdots + \lambda^m A_mx = 0 \tag{59}$$

的数值λ和非零向量x的问题。这类问题叫**m次λ矩阵特征值问题**。

这些类型的问题[式(57)、(58)、(59)]总称**广义特征值问题**。广义地说，凡是用某种形式将标准特征值问题一般化的问题都叫“广义特征值问题”。另外，因为除有阻尼振动外，其它问题都只用MK型特征值问题，所以不少文献称MK型问题为“广义特

1）到目前为止，没有一定的称呼，MCK型问题也一样。最近的论文标题多写成$Kx=\lambda Mx$型的特征值问题。

征值问题，下面研究 MK 型和 MCK 型特征值问题。

M 和 K 的对称性和正定性

用有限元法分析振动问题时，M，C，K 是对称的(除特殊情况外)，且可认为M和K(至少是M)是正定的。所以本书假定M、C，K 对称且M正定。

对称性和正定性的假定对于理论研究是必须的，在应用上也很重要。在讨论这些假定之前，我们首先简单研究一下在实际问题中这些假定是否确实合理。

关于对称性假定，容易从 M，C，K 的建立方法(计算式)进行验证。一般可以认为，虽然 M，C，K 根据伽辽金法建立时有可能成为非对称的，但根据能量原理建立时必然是对称的。

其次，关于正定性假定，一般地令 $\boldsymbol{u}$ 表示位移(广义位移向量)，因为二次型

$$U_D=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$$

表示变形能(的二倍)，而

$$T_D=\dot{\boldsymbol{u}}^T M\dot{\boldsymbol{u}}$$

表示动能(的二倍)。不管 $\boldsymbol{u}$、$\dot{\boldsymbol{u}}$ 是任何值，这些量都不会是负值(除非 $\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{u}}$ 为零，否则也不会为零)。因此K和M必然是正定矩阵——作为粗略讨论，证明完毕。

这里，脚标D表示离散模型的值，后面式子出现的脚标C表示连续模型的值。

严格地说，对上面证明还是有些担心。变形能和动能的精确表达式为

$$U_c=\iiint\frac{1}{2}(\text{应力})\times(\text{应变})dxdydz,$$

$$T_c=\iiint\frac{1}{2}(\text{质量密度})\times(\text{速度})^2dxdydz.\text{[1]}$$

---

1) 原文误为 $T_c=\iiint\frac{1}{2}(\text{质量密度})\times(\text{速度})dxdydz$. ——译注

虽然 U_c、 T_c 确实不会是负值，且在速度不为零时 T_c 是正值，但作为离散近似的 U_D和T_D不一定总有同样的性质。建立M和K的方法不同也许会有不同的性质。

本书不详细讨论这个问题，只谈谈结论。根据通常应用的公式所建立的M和K 确实是非负定的（因为一般不采用使它成为负值的模型），然而有必要注意非正定值的情况。

一种情况是，由于约束条件(边界条件)少，刚体能发生位移。例如当飞机或火箭可以自由迴转和自由移动时，因为相应于刚体位移的变形能为零，刚度矩阵K是非正定的。另一种情况是，存在没有集中质量(包括由分布质量换算的集中质量)的节点。如图 3.1 的系统，在两个串连弹簧下面挂一重物，忽略弹簧自重后，质量矩阵为

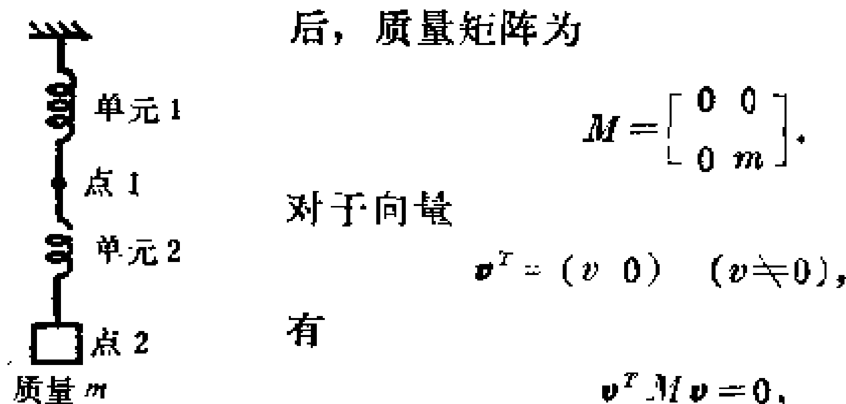


图 3.1

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

对于向量

$$\boldsymbol{v}^T=(v \quad 0) \quad (v\neq 0),$$

有

$$\boldsymbol{v}^T M \boldsymbol{v}=0,$$

这样的M不是正定的。

在通用程序中，信息输入方式一定，容易把非正定的M值输入。认定M必然正定的想法是十分危险的。

如果M和K不是正定值，在运算过程中将引起各种不便。例如不能进行乔勒斯基分解，不能求逆矩阵等（非负定值并非正定值，这意味着零是特征值，因此行列式的值为零，故此矩阵不是正则）。

由于没有别的解决办法，通常须要先行处理，将其变换成正定的形式，然后再进行正规的计算。与此类似，解静力问题时已有这种经验。在解平衡方程式

$$K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$$

时，若 K 为非正则矩阵，可先进行约束处理，使 K 正则化（同时正定化）后，再进行平衡方程式的计算。

在动力分析中（虽然随问题的种类和解法不同而异，但在多数情况下）只要求 M 具有正定性，至于 K，关系不大。因此一般使 M 正则化，在 M 为正定值、K 为非负定值情况下进行计算。

以后我们假定 M, C, K 均经过这种预先处理，即在假定 M，C，K 为对称矩阵、M 是正定的前提下进行讨论。

与标准特征值问题的等价性

在进入正题前，我们还必须再叙述一个值得注意的重要问题，即广义特征值问题与标准特征值问题的关系。

1）MK 型特征值问题

$$Kx = \lambda Mx \tag{60}$$

与标准特征值问题

$$A_1 x = \lambda x, \tag{61}$$

$$A_1 = M^{-1}K \tag{62}$$

等价。这只须在式(60)的两边左乘一个 M^{-1} 就能得到，A_1 虽然是非负定的（若 K 正定，A_1 也正定），但不对称。

2）MK 型特征值问题式(60)与标准特征值问题

$$A_2 y = \lambda y, \tag{63}$$

$$A_2 = (U^{-1})^T K U^{-1}, \tag{64}$$

$$y = Ux \tag{65}$$

等价。式中，U 是对 M 进行乔勒斯基分解的 U：

$$M = U^T U. \tag{66}$$

将式(60)作如下变换：

$$Kx = \lambda U^T U x,$$

$$(U^T)^{-1} K x = \lambda U x,$$

$$(U^T)^{-1} K U^{-1} y = \lambda y,$$

得到式(63)。这虽比前面的1)更复杂，但优点是 A_2 变成对称矩阵。

3）MCK 型特征值问题

$$\mu^2 M\mathbf{z} + \mu C\mathbf{z} + K\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{67}$$

与标准特征值问题

$$A_3\mathbf{w} = \mu\mathbf{w} \tag{68}$$

等价。式(68)中，

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}. \tag{69}$$

事实上，若展开式(68)、(69)：

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix},$$

得

$$\mathbf{s} = \mu\mathbf{z},$$

$$-M^{-1}K\mathbf{z} - M^{-1}C\mathbf{s} = \mu\mathbf{s}.$$

将第一式的 $\mathbf{s}$ 代入第二式，有

$$-M^{-1}K\mathbf{z} - M^{-1}C(\mu\mathbf{z}) = \mu(\mu\mathbf{z}),$$

$$\therefore \qquad \mu^2 M\mathbf{z} + \mu C\mathbf{z} + K\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

显然 A_3 是非对称的。

4）MCK 型特征值问题(67)与 MK 型特征值问题

$$A_4\mathbf{w} = \mu A_5\mathbf{w} \tag{70}$$

等价[1]。上式中，

$$A_4 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}. \tag{71}$$

事实上，展开

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix},$$

1）若 K 正则，也可以用 $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & C \end{bmatrix}$，$A_5 = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$，$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix}$ 替换。

有

$$M\boldsymbol{s} = \mu M\boldsymbol{z};$$

$$-K\boldsymbol{z} = \mu M\boldsymbol{s} + \mu C\boldsymbol{z}.$$

若M正则，得

$$\boldsymbol{s} = \mu\boldsymbol{z};$$

$$\therefore \qquad \mu^2 M\boldsymbol{z} + \mu C\boldsymbol{z} + K\boldsymbol{z} = 0.$$

矩阵 A_4、A_5 对称，但都非正定，因此不可能再应用 2)的方法把式(71)归结为关于实对称矩阵的标准特征值问题。

5) 对于 **MCK** 型特征值问题(67)，特别是当 C 为比例阻尼

$$C = \alpha M + \beta K$$

的情况。设无阻尼的相同体系的特征值问题为

$$K\boldsymbol{x} = \lambda M\boldsymbol{x},$$

它的特征值为 λ，特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}$ 为式 (67) 的特征向量(即 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$)，$\lambda$ 与 μ 之间有关系

$$\lambda = -(\mu^2 + \alpha\mu)/(\beta\mu + 1), \tag{72}$$

或者

$$\mu^2 + (\alpha + \beta\lambda)\mu + \lambda = 0.$$

因为由

$$\mu^2 M\boldsymbol{x} + \mu(\alpha M + \beta K)\boldsymbol{x} + K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

有

$$(\mu^2 + \alpha\mu)M\boldsymbol{x} + (\beta\mu + 1)K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

即

$$K\boldsymbol{x} = -\{(\mu^2 + \alpha\mu)/(\beta\mu + 1)\}M\boldsymbol{x}.$$

将此式与无比例阻尼的式子比较，可得式(72)。

特征方程式

式(57)、(58)可变为如下形式：

$$(K - \lambda M)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}; \tag{73}$$

$$(K + \mu C + \mu^2 M)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}. \tag{74}$$

要使两式对 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 时成立，则必须有

$$\det(K-\lambda M)=0; \tag{75}$$

$$\det(K+\mu C+\mu^2 M)=0. \tag{76}$$

它的展开式为

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\lambda m_{11} & k_{12}-\lambda m_{12} & \cdots & k_{1n}-\lambda m_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1}-\lambda m_{n1} & k_{n2}-\lambda m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\lambda m_{nn} \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} k_{11}+\mu c_{11}+\mu^2 m_{11} & \cdots & k_{1n}+\mu c_{1n}+\mu^2 m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1}+\mu c_{n1}+\mu^2 m_{n1} & \cdots & k_{nn}+\mu c_{nn}+\mu^2 m_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

展开上述行列式，按 λ 或 μ 加以整理，由式（75）得关于 λ 的 n 次代数方程式：

$$c_n\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0=0. \tag{77}$$

由式(76)得关于 μ 的“2 n 次”代数方程式

$$c'_{2n}\mu^{2n}+c'_{2n-1}\mu^{2n-1}+\cdots+c'_2\mu^2+c'_1\mu+c'_0=0. \tag{78}$$

它们被称作相应于特征值问题式(57)、(58) 的**特征方程式**。特征方程式的根是相应特征值问题的特征值。求得特征值后，代入式（73)、（74）解一次联立方程（不定方程）可求得特征向量。

因为一般的 n 次代数方程式有 n 个根，所以 MK 型特征值问题有 n 个特征值。MCK 型特征值问题有 2 n 个特征值。但严格说应有少数例外、对于标准特征值问题，特征方程式中 λ^n 的系数不为 0[若展开式(33)，λ^n 的系数为 1 或 −1]，因此必然有 n 个特征值。但对于广义特征值问题，由于式(77)、(78)的 c_n，c'_{2n} 等有可能为 0，因此，用同样的论断是有些危险的。例如，若

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},$$

将

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}\mu^2+\mu+1 & \mu^2+\mu+1\\ \mu^2+\mu+1 & \mu^2+\mu+1\end{vmatrix}=0$$

展开后，特征多项式是0次多项式，是否就一个特征值也没有呢？并不是这样。方程式

$$1-\lambda=0,\quad \mu^2+\mu+1=0$$

的根

$$\lambda=1,\quad \mu=(1\pm\sqrt{3}\,i)/2$$

就是特征值，任意向量都是特征向量。同样，当

$$\det(K-\lambda M),\quad \det(\mu^2M+\mu C+K)$$

的阶数未到n阶时要特别注意。然而，由于已注意到这一点，预先使M为正定值（从而当然也是正则的），就不会发生上述那种不正常现象。

实特征值和复数特征值

MK型问题的特征值、特征向量是实数和实向量（在M和K都对称，且至少有一个是正定的前提下）。其理由是明显的，因为MK型问题可归结为关于实对称矩阵的标准特征值问题式(63)。MCK型问题的特征值一般为复数，且因为M、C、K是实矩阵，特征方程式(78)为实系数方程。因此，若μ为特征值，则其共轭复数$\bar{\mu}$也是特征值；若对应于μ的特征向量为x，则$\bar{x}$是对应于$\bar{\mu}$的特征向量。这可以直接证明。但变换成标准特征值问题(68)，利用§3.3节所述复数特征值的性质，就可直接得出。

一般而论，MCK型问题的特征向量是复向量。然而，在总体矩阵这一级，令阻尼矩阵为

$$C=\alpha M+\beta K,$$

即用所谓比例阻尼，则特征向量为实向量。

特征向量的正交性

如前所述，标准特征值问题的特征向量相互正交，即对应于不同特征值的特征向量x_i，x_j之间通常有以下关系：

$$x_i^T x_j = 0, \tag{79}$$

广义特征值问题没有这种意义的正交性。然而，特别是当M, C, K部对称时，也有与此极相似的关系（广义正交性）。

首先，在 MK 型问题中，对应于不同特征值 λ_i，λ_j 的特征向量 x_i, x_j 之间有关系

$$\begin{aligned} x_i^T M x_j &= 0, \\ x_i^T K x_j &= 0. \end{aligned} \tag{80}$$

根据式（63）y_i, y_j 的正交性（一般意义的正交性）可明显看出上式是成立的，但也可直接证明如下（这时不必假定M为正交）。设

$$K = K^T, \quad M = M^T, \tag{i}$$

$$K x_i = \lambda_i M x_i, \tag{ii}$$

$$K x_j = \lambda_j M x_j, \tag{iii}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \tag{iv}$$

则

$$\begin{array}{ll} x_j^T \times (\text{ii}) & x_j^T K x_i = \lambda_i x_j^T M x_i \\ x_i^T \times (\text{iii}) & x_i^T K x_j = \lambda_j x_i^T M x_j \quad (- \\ \hline & 0 = (\lambda_i - \lambda_j) x_i^T M x_j \end{array} \tag{v}$$

故由（iv）得

$$x_i^T M x_j = 0.$$

代入式（v）得

$$x_i^T K x_j = 0.$$

这种内积（中间插入矩阵的内积）为 0 的性质，称**广义正交性**或**共轭正交性**。特别要指明它是关于什么矩阵正交。例如可称为“x_i 和 x_j 关于M正交”。在文献中称为M正交性。

在 MCK 型问题中，一般说来，由于有 $2n$ 列特征向量，不可能在 n 维空间全部正交（无论是狭义还是广义）。

然而，如果是比例阻尼，则因特征向量与 MK 型问题相同，它们关于M正交，关于K也正交。进而，由于

$$
\begin{aligned}
z_i^T C z_j &= z_i^T(\alpha M+\beta K) z_j \\
&= \alpha z_i^T M z_j + \beta z_i^T K z_j = 0,
\end{aligned}
$$

所以关于 C 也正交。即

$$
\begin{aligned}
&z_i^T M z_j = 0, \\
&z_i^T C z_j = 0, \\
&z_i^T K z_j = 0
\end{aligned}
\tag{81}
$$

成立（这时 z_i，z_j 是实向量）。

非比例阻尼的情况稍复杂一些，对正交性的定义也必须修改得比以前更广义一些。然而不管怎样总存在某种正交性，这些正交性基本上有如下关系：

$$
\begin{aligned}
&[\mu_i z_i^T \ \ z_i^T]\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_j z_j \\ z_j \end{bmatrix} = 0, \\
&[\mu_i z_i^T \ \ z_i^T]\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_j z_j \\ z_j \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned}
\tag{82}
$$

当 $\mu_i \neq \mu_j$ 时都成立。它们可写成下式：

$$
\begin{aligned}
&[z_i^T \ \ z_i^T]\begin{bmatrix} \mu_i\mu_j M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_j \\ z_j \end{bmatrix} = 0, \\
&[z_i^T \ \ z_i^T]\begin{bmatrix} 0 & \mu_i M \\ \mu_j M & \mu_i\mu_j C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_j \\ z_j \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}
\tag{82'}
$$

其展开式如下：

$$
\begin{aligned}
&\mu_i\mu_j z_i^T M z_j = z_i^T K z_j, \\
&(\mu_i+\mu_j) z_i^T M z_j + \mu_i\mu_j z_i^T C z_j = 0.
\end{aligned}
\tag{82''}
$$

这是因为 MCK 型问题可以归结为如下的 MK 型问题（式(71)）：

$$
\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu z \\ z \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu z \\ z \end{bmatrix}. \tag{83}
$$

且在 MK 型问题中，若矩阵对称则特征向量关于这矩阵正交。这是由于式（83）对 $\mu_i z_i$ 和 $\mu_j z_j$ 均成立，故分别用 $[\mu_j z_j^T \ \ z_j^T]$ 和 $[\mu_i z_i^T \ \ z_i^T]$ 左乘后相减，

$$[\mu_j z_j^T\ z_j^T]\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_i z_i\\ z_i\end{bmatrix}=\mu_i[\mu_j z_j^T\ z_j^T]\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_i z_i\\ z_i\end{bmatrix}$$

$$[\mu_i z_i^T\ z_i^T]\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_j z_j\\ z_j\end{bmatrix}=\mu_j[\mu_i z_i^T\ z_i^T]\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_j z_j\\ z_j\end{bmatrix}$$

$-)$

$$0=(\mu_i-\mu_j)[\mu_j z_j^T z_j^T]\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_i z_i\\ z_i\end{bmatrix},$$

当 $\mu_i-\mu_j\neq 0$ 时就得到式（82）。

这正交关系的形式虽然十分奇特，但却是后述式（88）、(89) 所必需的（若没有正交性，就必须解联立方程）。

作为基底的特征向量

关于正定矩阵 M 正交的向量 $x_1,\cdots,x_m$ 是线性无关的。事实上，若存在数量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$，使下式成立：

$$x_m=\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1},$$

则

$$x_m^T M x_m=\alpha_1 x_m^T M x_1+\cdots+\alpha_{m-1}x_m^T M x_{m-1}=0.$$

这与 M 为正定的假设相反，所以，$x_1,\cdots,x_m$ 必须是线性无关的。

在 MK 型问题中，相异特征值的特征向量对 M 正交。若特征值有 p 个重复，则可在它的特征向量中选出 p 个关于 M 正交的向量[1]。如果共有 n 个特征值，可以选出 n 个正交向量

$$x_1\ x_2\ \cdots\ x_n,$$

任意向量 v 可表示为

$$v=\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n, \tag{84}$$

式中，

$$\alpha_i=x_i^T M v/x_i^T M x_i. \tag{85}$$

对式（84）两边左乘 $x_i^T M$，利用关于 M 正交性有

1）研究式（65）后知道，关于标准特征值的各个定理，几乎都可以原封不动地应用于 MK 型特征值问题中。

$$\boldsymbol{x}_i^T M \boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_i^T M \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_i \boldsymbol{x}_i^T M \boldsymbol{x}_i + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_i^T M \boldsymbol{x}_n$$
$$= \alpha_i \boldsymbol{x}_i^T M \boldsymbol{x}_i .$$

由此可导出式（85）．若先调节特征向量的长度，使

$$\boldsymbol{x}_i^T M \boldsymbol{x}_i = 1 \quad (i = 1, \cdots, n),$$

[可设新 $\boldsymbol{x}_i = (1/\sqrt{\boldsymbol{x}_i^T M \boldsymbol{x}_i})\boldsymbol{x}_i$]　　　　(86)

则式（85）简化成

$$\alpha_i = \boldsymbol{x}_i^T M \boldsymbol{v} . \tag{87}$$

MCK 型问题也大致相同，按照式(82)的意义，设相互正交的向量为

$$\boldsymbol{z}_1 \quad \bar{\boldsymbol{z}}_1 \quad \boldsymbol{z}_2 \quad \bar{\boldsymbol{z}}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{z}_n \quad \bar{\boldsymbol{z}}_n,$$

相应的特征值为

$$\mu_1 \quad \bar{\mu}_1 \quad \mu_2 \quad \bar{\mu}_2 \quad \cdots \quad \mu_n \quad \bar{\mu}_n,$$

则 2 n 维向量可用如下形式表示：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \mu_1 \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \bar{\boldsymbol{z}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{z}}_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \mu_2 \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} \bar{\mu}_2 \bar{\boldsymbol{z}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{z}}_2 \end{bmatrix} +$$
$$+ \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} \mu_n \boldsymbol{z}_n \\ \boldsymbol{z}_n \end{bmatrix} + \beta_n \begin{bmatrix} \bar{\mu}_n \bar{\boldsymbol{z}}_n \\ \bar{\boldsymbol{z}}_n \end{bmatrix}, \tag{88}$$

式中

$$\alpha_k = [\mu_k \boldsymbol{z}_k^T \quad \boldsymbol{z}_k^T] \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \Big/$$
$$[\mu_k \boldsymbol{z}_k^T \quad \boldsymbol{z}_k^T] \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_k \boldsymbol{z}_k \\ \boldsymbol{z}_k \end{bmatrix}, \tag{89}$$

$$\beta_k = [\bar{\mu}_k \bar{\boldsymbol{z}}_k^T \quad \bar{\boldsymbol{z}}_k^T] \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \Big/$$
$$[\bar{\mu}_k \bar{\boldsymbol{z}}_k^T \quad \bar{\boldsymbol{z}}_k^T] \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k \bar{\boldsymbol{z}}_k \\ \bar{\boldsymbol{z}}_k \end{bmatrix}.$$

证明与式（85）相同。若 s 和 z 都是实向量，则

$$\beta_k=\bar{\alpha}_k,$$

式（88）简化为

$$\begin{Bmatrix} s \\ z \end{Bmatrix}=2\,\mathrm{Re}\begin{bmatrix}\alpha_1\mu_1 z_1 \\ \alpha_1 z_1\end{bmatrix}+\cdots+2\,\mathrm{Re}\begin{bmatrix}\alpha_n\mu_n z_n \\ \alpha_n z_n\end{bmatrix}.$$

瑞雷商

定义 MK 型特征值问题的瑞雷商为

$$R(x)=\frac{x^T K x}{x^T M x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_i x_j}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_i x_j}. \tag{90}$$

若将式(57)的特征向量代入 x，得到

$$R(x)=\lambda\text{[1]}. \tag{90'}$$

关于所有 x 的 $R(x)$ 的最小值为最小特征值 λ_{min}，$R(x)$ 的最大值为最大特征值 λ_{max}。即，一般地对任何 x 有

$$\lambda_{min}\leqslant R(x)\leqslant\lambda_{max}, \tag{91}$$

故

$$\min_x R(x)=\lambda_{min},$$

$$\max_x R(x)=\lambda_{max}. \tag{92}$$

定义 MCK 型问题的瑞雷商为

$$R(z)=\frac{z^* K z}{z^* M z}. \tag{93}$$

[z^*是 z 的共轭转置向量，即 $z^*=(\bar{z})^T$.] 把特征向量代入 z 后有

$$R(z)=|\mu|^2. \tag{94}$$

事实上，若 z 为特征向量，则有下列关系：

---

1) 原文误为 $R(x)=\mu$. ——译注

$$\mu^2 M\boldsymbol{z}+\mu C\boldsymbol{z}+K\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}, \tag{i}$$

$$\bar{\mu}^2 M\bar{\boldsymbol{z}}+\bar{\mu} C\bar{\boldsymbol{z}}+K\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{0}. \tag{ii}$$

使

$$\bar{\mu}\boldsymbol{z}^*\times(\mathrm{i})-\mu\boldsymbol{z}^T\times(\mathrm{ii}),$$

消去第二项有

$$\mu\bar{\mu}(\mu-\bar{\mu})\boldsymbol{z}^* M\boldsymbol{z}+(\bar{\mu}-\mu)\boldsymbol{z}^* K\boldsymbol{z}=0. \tag{iv}$$

得

$$|\mu|^2=\mu\bar{\mu}=\boldsymbol{z}^* K\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}^* M\boldsymbol{z}. \tag{v}$$

另外，对 MCK 型问题的瑞雷商还可以定义为另一形式：

$$Q(\boldsymbol{z})=\frac{\boldsymbol{z}^* C\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}^* M\boldsymbol{z}}. \tag{95}$$

把特征向量代入 $\boldsymbol{z}$ 后有

$$Q(\boldsymbol{z})=2\,Re(\mu). \tag{96}$$

事实上，使

$$\boldsymbol{z}^*\times(\mathrm{i})-\boldsymbol{z}^T\times(\mathrm{ii}), \tag{vi}$$

有

$$(\mu^2-\bar{\mu}^2)\boldsymbol{z}^* M\boldsymbol{z}+(\mu-\bar{\mu})\boldsymbol{z}^* C\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}, \tag{vii}$$

得

$$2\,Re(\mu)=\mu+\bar{\mu}=\boldsymbol{z}^* C\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}^* M\boldsymbol{z}. \tag{viii}$$

此外，当把式（iv）变为式（v）及把式（vii）变为式(viii)时，由于假设 $\mu-\bar{\mu}\neq0$，当 μ 为实数时，式（94），（96）不成立。

对式(i)左乘 $\boldsymbol{z}^*$，再除以 $\boldsymbol{z}^* M\boldsymbol{z}$ 后得

$$\mu^2-Q\mu+R=0. \tag{97}$$

当其根为复数时，根和系数的关系如前述式（94），（96）。μ 为实数时，式（97）往往有增根。例如

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix},$$

相应于 $\mu=0$ 的特征向量为

$$z=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

有

$$z^T M z=2,\ z^T C z=1,\ z^T K z=0,$$

$$Q=1/2,\ R=0,$$

式（97）为

$$2\mu^2+\mu+0=0.$$

其根为 $\mu=0$ 和 $\mu=-1/2$。但 $\mu=-1/2$ 却不是特征值。

§ 3.5 振型分解法

对振型分解法有各种不同的解释。

最广义的解释是：凡用“固有振动、固有振型”的手段分析振动问题的方法都叫振型分解法。

稍狭义一点，可以认为振型分解法是按振型迭加求动力响应的方法的总称。本节采用这种解释。

更狭义的解释常常只称使用后述式（113）的方法为振型分解法。

振型分解法的最大优点是实施简单，计算时间比仿真法少得多。也许会有人认为特征值和特征向量的计算麻烦，不过它通常总是须要计算的。若有完备的特征值计算程序库，也不会给使用者造成很大负担。

另一方面，它的最大缺点是只适用于线性问题（且是常系数问题）。

为了利用振型分解法的简便性，不必拘泥于追求精确解，而宁可干脆求近似解。利用 § 3.2 所述各种公式虽可得到精确解，但实用上按若干个（m 个，$m\ll n$）低振型迭加的近似解已经足够。

为了方便读者，今再摘录某些公式如下。虽然动力响应问题应以强迫振动为中心课题，但按叙述顺序，仍从自由振动开始。

$M\ddot{u}+Ku=0$ 的情况

对于初始条件 $u(0)$，$\dot{u}(0)$，它的解是

$$u=\sum_k (a_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t+b_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t) x_k. \tag{98}$$

式中，λ_k，x_k 为特征值问题

$$kx=\lambda x$$

的第 k 个特征值和特征向量（有重特征值时，选择关于 M 正交的特征向量，下同）。又

$$a_k=x_k^T M \dot{u}(0)/x_k^T M x_k,$$
$$b_k=x_k^T M u(0)/x_k^T M x_k. \tag{99}$$

关于$\sum$作如下解释：由 $k=1$ 到 $k=n$ 取总和，得到精确解，但实际上预先决定适当的项数 m，从 $k=1$ 到 m 求和得到近似解（以下相同）。

$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0$ 的情况

对于初始条件 $u(0)$，$\dot{u}(0)$，它的解是

$$u(t)=\sum_k (c_k e^{\mu_k t} z_k+\bar{c}_k e^{\bar{\mu}_k t} \bar{z}_k) \tag{100}$$

$$=2\sum_k e^{\gamma_k t}\{a_k(\cos\omega_k t\cdot x_k-\sin\omega_k t\cdot y_k)-$$
$$-b_k(\sin\omega_k t\cdot x_k+\cos\omega_k t\cdot y_k)\} \tag{100'}$$

$$=2\sum_k r_k e^{\gamma_k t}\{\cos(\omega_k t+\varphi_k)\cdot x_k-$$
$$-\sin(\omega_k t+\varphi_k)\cdot y_k\}^{1)}. \tag{100''}$$

式中，μ_k，z_k 为特征值问题

$$\mu^2 M z+\mu C z+K z=0$$

的第 k 个特征值和相应的特征向量；γ_k，ω_k，x_k，y_k 是 μ_k，z_k 的实部和虚部，即

1) 原书公式有错，已改正。——译注

$$\mu_k=\gamma_k+i\omega_k,\quad \boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{x}_k+i\boldsymbol{y}_k.$$

又

$$c_k=\frac{1}{d_k}[\mu_k\boldsymbol{z}_k^T\quad \boldsymbol{z}_k^T]\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{u}}(0)\\ \boldsymbol{u}(0)\end{bmatrix},$$

$$d_k=[\mu_k\boldsymbol{z}_k^T\quad \boldsymbol{z}_k^T]\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_k\boldsymbol{z}_k^T\\ \boldsymbol{z}_k^T\end{bmatrix},$$

a_k，b_k，r_k，φ_k 分别为 c_k 的实部、虚部、模和幅角。即

$$c_k=a_k+ib_k=r_ke^{i\varphi_k}.$$

$M\ddot{\boldsymbol{u}}+K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t)$ 的情况

在特征值问题

$$K\boldsymbol{x}=\lambda M\boldsymbol{x}$$

的特征向量中，可选择 n 个关于 M 正交的向量，进行长度调节（正规化）

$$\boldsymbol{x}^TM\boldsymbol{x}=1 \tag{101}$$

后的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1\quad \boldsymbol{x}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{x}_n.$$

令 X 为它们的列向量矩阵[1]（叫做振型矩阵），即

$$X=[\boldsymbol{x}_1\mid\cdots\mid\boldsymbol{x}_n]. \tag{102}$$

设与 $\boldsymbol{x}_i$ 相应的特征值 λ_i 的平方根为 $\omega_i(i=1,\cdots,n)$，对微分方程式

$$M\ddot{\boldsymbol{u}}+K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t)$$

两边左乘 X^T，进行变量代换

$$\boldsymbol{y}(t)=X^{-1}\boldsymbol{u}(t)\text{或者}\ \boldsymbol{u}=X\boldsymbol{y}. \tag{103}$$

有

$$X^TMX\ddot{\boldsymbol{y}}+X^TKX\boldsymbol{y}=X^T\boldsymbol{f}(t). \tag{104}$$

据式(89)、(90')、(101)有

---

1) 若仅求近似解，也可以只用低振型，这时由于 X 是长方形矩阵，式(103)中的 X^{-1} 用 X^TM 代换。

$$X^TMX = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad X^TKX = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{105}$$

若令式(104)右边为

$$X^Tf(t) \equiv g(t) \equiv [g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)]^T, \tag{106}$$

式(104)的实质是

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \lambda_1 y_1 &= g_1(t), \\ &\cdots \\ \ddot{y}_n + \lambda_n y_n &= g_n(t). \end{aligned} \tag{107}$$

此方程虽然是微分方程组的形式，但第 i 个方程只出现 $y_i(i=1, \cdots, n)$，故可以分别单独求解。用§3.1式(15)解第 i 编号的方程式得

$$y_i(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t g_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau + \alpha_i\cos\omega_i t + \beta_i\sin\omega_i t. \tag{108}$$

式中，

$$\alpha_i = y_i(0), \quad \beta_i = \dot{y}_i(0).$$

根据式(103左)，把已知初始条件 $u(0)$、$\dot{u}(0)$变换为 $y(0)$，$\dot{y}(0)$，应用式(108)求 $y_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$，汇集它的结果，按式(103右)逆变换求得 u。这就是离散的付立叶分析。

$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$ 的情况

按精确法计算工作量相当大，这里首先介绍实际常使用的简便方法。

简便法不直接解MCK型特征值问题，而是首先解MK型（即与(1)讨论的问题相同的(M，K)）特征值问题，将它的特征向量按式(101)正规化，按式(102)建立振型矩阵X，与前述情况相同，对微分方程式

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$$

左乘 X^T 后，按式(103)进行变量置换有

$$X^T M X\ddot{y} + X^T C X\dot{y} + X^T K X y = g(t). \tag{109}$$

因为有关系式(105)，类似地设

$$X^T C X \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}, \tag{110}$$

式(109)成为

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{1j}\dot{y}_j + \lambda_1 y_1 = g_1(t), \\ &\cdots \\ &\ddot{y}_n + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj}\dot{y}_j + \lambda_n y_n = g_n(t). \end{aligned} \tag{111}$$

上面的推导直至式(111)为止仍然是精确式，既未省略也非近似。若要精确解可以解式(111)。而简便方法是设

$$i \neq j \text{ 时} \quad \gamma_{ij} = 0, \tag{112}$$

则式(111)与(107)相同，实质上是化作下列独立方程求解：

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 + \gamma_{11}\dot{y}_1 + \lambda_1 y_1 = g_1(t), \\ &\cdots \\ &\ddot{y}_n + \gamma_{nn}\dot{y}_n + \lambda_n y_n = g_n(t). \end{aligned} \tag{113}$$

关于单个式子的解法已经在§3.1中叙述(参考§3.1)。

总之，式(112)是简便方法的关键。但这假设是否合理呢？

对于比例阻尼，式(112)可自动满足[式(81)]。对于非比例阻尼，式(112)虽然有时也会满足，但通常不能满足，这时式(112)是一个近似式。这种近似是否恰当要看具体问题而定。当所有 $\gamma_{ij}(i \neq j)$ 与 γ_{ii} 相比足够小时可以忽略。但若 γ_{ij} 相当大时就不宜作这近似假定。在处理实际问题时，可先试作 $X^T C X$ 看看。若它的非对角元素相当小，简便法即可适用，若特别小则变成精

确解法。

* * *

下面是精确解法。若M正则，则微分方程

$$M\ddot{\boldsymbol{u}}+C\dot{\boldsymbol{u}}+K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t)$$

与一阶联立微分方程

$$M\dot{\boldsymbol{u}}=M\boldsymbol{v},$$

$$M\dot{\boldsymbol{v}}+C\dot{\boldsymbol{u}}=-K\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(t)$$

等价。从上一个式子$\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{v}$，有$\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{u}}$，将这代入下一个式子并移项得到原来的微分方程。它也可写成

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -K\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ \boldsymbol{f}\end{Bmatrix}. \qquad (114)$$

另外，假设 MCK 型特征值问题

$$\mu^2M\boldsymbol{z}+\mu C\boldsymbol{z}+K\boldsymbol{z}=0$$

没有重特征值，且都是复数。设特征值和相应的特征向量为

$$\mu_1 \quad \bar{\mu}_1 \quad \mu_2 \quad \bar{\mu}_2 \quad \cdots \quad \mu_n \quad \bar{\mu}_n,$$

$$\boldsymbol{z}_1 \quad \bar{\boldsymbol{z}}_1 \quad \boldsymbol{z}_2 \quad \bar{\boldsymbol{z}}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{z}_n \quad \bar{\boldsymbol{z}}_n.$$

把这些向量排成下列矩阵

$$Z=[\boldsymbol{z}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{z}_n],\quad \bar{Z}=[\bar{\boldsymbol{z}}_1 \mid \cdots \mid \bar{\boldsymbol{z}}_n]. \qquad (115)$$

令

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{bmatrix},\quad \phi=\begin{bmatrix}Z\Lambda & \bar{Z}\bar{\Lambda}\\ Z & \bar{Z}\end{bmatrix} \qquad (115')$$

（Z为n行、n列矩阵，ϕ为$2n$行、$2n$列矩阵）。进行变量置换

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}=\Phi^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}\quad 即\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\Phi\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}, \qquad (116)$$

有

$$\frac{d}{dt}\Phi^T\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\Phi\begin{Bmatrix}p\\ q\end{Bmatrix}=\Phi^T\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -K\end{bmatrix}\Phi\begin{Bmatrix}p\\ q\end{Bmatrix}+\Phi^T\begin{Bmatrix}0\\ f\end{Bmatrix}\qquad(117)$$

根据正交性[式(82)]有

$$\Phi^T\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\Phi=\begin{bmatrix}D_1 & 0\\ 0 & \bar{D}_1\end{bmatrix},\ \Phi^T\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -K\end{bmatrix}\Phi=\begin{bmatrix}D_2 & 0\\ 0 & \bar{D}_2\end{bmatrix}\qquad(118)$$

式中，

$$D_1=\begin{bmatrix}d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}\delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n\end{bmatrix},\qquad(119)$$

$$d_i=2\,\mu_i \boldsymbol{z}_i^T M\boldsymbol{z}_i+\boldsymbol{z}_i^T C\boldsymbol{z}_i\qquad(i=1,\cdots,n),$$

$$\delta_i=\mu_i^2\boldsymbol{z}_i^T M\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{z}_i^T K\boldsymbol{z}_i\qquad(i=1,\cdots,n).$$

从式(117)得

$$\begin{bmatrix}D_1 & 0\\ 0 & \bar{D}_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}D_2 & 0\\ 0 & \bar{D}_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p\\ q\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}Z^T f\\ \bar{Z}^T f\end{Bmatrix}.\qquad(120)$$

展开上式

$$\begin{cases}d_1\dot{p}_1=\delta_1 p_1+g_1,\\ \cdots\\ d_n\dot{p}_n=\delta_n p_n+g_n,\end{cases}\qquad\begin{cases}\bar{d}_1\dot{q}_1=\bar{\delta}_1 q_1+\bar{g}_1,\\ \cdots\\ \bar{d}_n\dot{q}_n=\bar{\delta}_n q_n+\bar{g}_n,\end{cases}\qquad(120')$$

式中，

$$\boldsymbol{g}=[g_1,\cdots,g_n]^T=Z^T\boldsymbol{f}.$$

一般，微分方程

$$\dot{y}=a\,y+b(t)\qquad(a\text{ 为常数})$$

对于初始条件 $y(0)$ 的解为

$$y(t)=e^{at}\left\{\int_0^t b(t)e^{-at}dt+y(0)\right\}.\qquad(121)$$

如果将

$$a=\delta_i/d_i,\quad b(t)=g_i(t)/d_i$$

$(i=1,\cdots,n)$ 代入上式，可得到微分方程式（120′左）各式的解

$p_1(t),\cdots,p_n(t)$。$q_i(t)$可按同理求得，将微分方程

$$d_i\dot{p}_i=\delta_i p_i+g_i$$

两边换成共轭复数，有

$$\bar{d}_i\dot{\bar{p}}_i=\bar{\delta}_i\bar{p}_i+\bar{g}_i.$$

它与关于 q_i 的微分方程式相同，

$$q_i(t)=\bar{p}_i(t). \tag{122}$$

将其代入式(116)逆变换得 u，计算式为

$$u=Zp+\bar{Z}q=Zp+\bar{Z}\bar{p}=\mathrm{Re}(Zp), \tag{123}$$

因此不必计算 q。

在作以上计算时，必须注意大部分的变量是复数，因为式(121)的积分中 a,b 是复数。若设

$$a=\alpha+i\beta,\ \ b(t)=\varphi(t)+i\psi(t),$$[1]

则变成如下计算：

$$y(t)=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)\times$$

$$\times\int_0^t\{\varphi(t)+i\psi(t)\}e^{-\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)dt.$$

数值积分时，时间增量 Δt 与 $\cos\beta t$、$\sin\beta t$ 的周期相比必须假设得足够小。

另外，近似计算时只使用关于低振型长方形矩阵

$$Z=[z_1\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ z_m];$$

$$\Phi=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mu_1 z_1 & \cdots & \mu_m z_m & \bar{\mu}_1\bar{z}_1 & \cdots & \bar{\mu}_m\bar{z}_m\\ \hline z_1 & \cdots & z_m & \bar{z}_1 & \cdots & \bar{z}_m\end{array}\right]. \tag{124}$$

为了计算 p,q 的初始值，用联立方程式

$$\Phi\begin{bmatrix}p(0)\\ q(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v(0)\\ u(0)\end{bmatrix}$$

---

1) 原文误为 $b(t)=\varphi(t)+\psi(t)$.——译注

的最小二乘解(由于方程式的个数不够，解不定)，即用联立方程式

$$\Phi^*\Phi \begin{bmatrix} p(0) \\ q(0) \end{bmatrix} = \Phi^* \begin{bmatrix} v(0) \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{125}$$

的解。

第四章　特征值的计算方法

在动力分析的有限元法中，解 MK 型和 MCK 型特征值问题是重要的课题。MK 型，MCK 型问题的解法可分为直接解、变换为标准型后求解两大基本途径。直接解 MK 型问题的方法有：广义雅可比法，子空间迭代法，得塔-米朗特·萨金法，斯特姆法，共轭斜量法等。直接解 MCK 型问题的方法有：兰索斯法，伯努利法。为了变换成标准型问题，可以采用§3.4所列举的各种方法。虽然标准型问题的解法较多，但简便地解小规模问题宜用雅可比法；高效率地解中规模问题宜用豪斯霍尔德法；对大规模问题宜用逆迭代法和同时迭代法。

§4.1　概　　述

本章介绍下列三种类型特征值问题的解法：

标准型　　$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$；　　(1)

MK 型　　$K\boldsymbol{x}=\lambda M\boldsymbol{x}$；　　(2)

MCK 型　　$\mu^2 M\boldsymbol{z}+\mu C\boldsymbol{z}+K\boldsymbol{z}=0$。　　(3)

特征值问题的解法大致可分为两大体系：

先求特征值的方法；

先求特征向量的方法。

若先求特征值，可解联立方程

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=0, \tag{4}$$

$$(K-\lambda M)\boldsymbol{x}=0, \tag{5}$$

$$(\mu^2 M+\mu C+K)\boldsymbol{z}=0 \tag{6}$$

得到特征向量。相反，若先求特征向量，可由瑞雷商

$$R=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}, \tag{7}$$

$$R=\boldsymbol{x}^T K\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{x} \tag{8}$$

求得特征值($\lambda=R$)。对 MCK 型问题，可解二次方程

$$a\mu^2+b\mu+c=0 \tag{9}$$

求得特征值。式中，

$$a=z^*Mz,\quad b=z^*Cz,\quad c=z^*Kz.$$

求特征值的方法之一已在§3.3和§3.4中介绍过。即可展开为特征方程

$$\det(A-\lambda I)=0, \tag{10}$$

$$\det(K-\lambda M)=0, \tag{11}$$

$$\det(\mu^2M+\mu C+K)=0, \tag{12}$$

然后按解高次代数方程的方法求解。这个方法原理简单，但实际计算困难很多。困难之一是行列式的展开相当麻烦，因此，通常先执行基本运算[1]把行列式变为尽可能简单的形式后再展开。为此提出了各种方法，达尼列夫斯基(Danilewski)法是其代表。另一个困难是这方法容易引起非常大的误差，理论分析表明这是无法避免的，因此最近已几乎不用此法。

另一解法是：对 λ 或 μ 的不同数值计算下列函数：

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda I), \tag{13}$$

$$f(\lambda)=\det(K-\lambda M), \tag{14}$$

$$f(\mu)=\det(\mu^2M+\mu C+K)^{2)}, \tag{15}$$

然后采用解非线性方程的一般方法求 f 的零点。这是古典的得塔—米朗特·萨金法。通常认为此法虽简单但效率差，其实与其他方法配合使用往往很有效。

计算上述行列式可得副产物——主子行列式的值，利用它可得到求特征值更高效的方法，这方法以斯特姆定理为基础，本书

---

1) 行列式的基本运算是：将行列式某行增大若干倍、变换行列式的两行、将行列式的某一行增大若干倍加于另一行，进行这样的基本运算后不改变

行列式的值＝0

的性质。

2) 原文公式(15)误为 $f(u)=0$. ——译注

叫作**斯特姆**(Sturm)法，通常称为二分(bisection)法。古普特(Gupta)法和威特里克(Wittrick)法都属于这个系统。

求特征值还有另一解法：使用恰当的正则矩阵 P，Q，用 P 左乘式(1)、(2)、(3)两边，并作变量置换，使 $\boldsymbol{y}=Q^{-1}\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$，将原问题(1)、(2)、(3)变换为：

$$PAQ\boldsymbol{y}=\lambda PQ\boldsymbol{y}, \tag{16}$$

$$PKQ\boldsymbol{y}=\lambda PMQ\boldsymbol{y}, \tag{17}$$

$$\mu^2 PMQ\boldsymbol{y}+\mu PCQ\boldsymbol{y}+PKQ\boldsymbol{y}=0. \tag{18}$$

使 PAQ 等矩阵变成尽量简单的形式然后求解.

在标准特征值问题中，若矩阵 A 对称，则适当地选取 P 和 Q 使式(16)中的系数矩阵成为对角线形式：

$$PAQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix}, \quad PQ=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1\end{bmatrix}. \tag{19}$$

这样，λ_1、λ_2，…，λ_n 就是特征值，而矩阵 Q 的各列就是特征向量。因此问题得解. 确定 P，Q 最简单的方法是雅可比(Jacobi)法。它适用于小规模问题，此法将在§4.2中详述。此外，还有LR法、QR法等

对于MK型问题，若 M，K 都是对称的，则恰当选择 P 和 Q 使式中的系数矩阵成为

$$PKQ=\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \alpha_n\end{bmatrix}, \quad PMQ=\begin{bmatrix}\beta_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \beta_n\end{bmatrix}. \tag{20}$$

于是，特征值为

$$\lambda_i=\alpha_i/\beta_i \qquad (i=1,\ \cdots,\ n). \tag{21}$$

求 P、Q 的方法有广义雅可比法。它将在§4.3详述。

不管采用什么方法，为达到式(19)、(20)的形式，一般都需要无限次的运算（虽然实际上只需有限次运算就可得到近似解，但要得到足够精确的结果还必需相当多次的运算）。为解决这一问题可作适当的改变，即不变换成式(19)、(20)那样完全对角矩阵的形式，而变换成三重对角矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

这样只要有限次运算(而且运算次数很少)即可完成。这种变换称为问题的三重对角化。三重对角化的方法有豪斯霍尔德（Householder)法、吉文斯(Givens)法和兰索斯(Lanczos)法。

当然，把矩阵三重对角化后，问题还没有解决，接着还必须解三重对角矩阵的特征值问题。为此，可按以前所述的各种方法建立三重对角矩阵的专用公式和程序。常用的方法有斯特姆法(二分法)和 QR 法(或 LR 法)。

以上是先求特征值的方法。与此相反，也可先求特征向量。常用的方法有幂法(*Power method*)。它的基本点是，任意选取初始向量 x_1，用它与 A 相乘若干次后将逐渐迫近“与 A 的绝对值最大的特征值相应的特征向量”x_{max}。利用这一性质，可以求得由特征值大的一边算起顺次的各特征向量。如果用 A^{-1}代替 A 与迭代向量相乘，则可以求得由特征值小的一边算起顺次的各特征向量(这叫逆迭代法)。另外，如果使用多个向量进行迭代运算，并使各迭代向量保持相互正交，则可以同时求得多个特征向量，这方法称为同时迭代法。这方法用于 MK 型问题时称作子空间迭代法。

先求特征向量除上述方法外还有共轭斜量法(简称 CG 法)。此法使用了 p. 89 提到的“瑞雷商的驻值条件”。对于只需求出最

大或最小特征值的情况，此法也很方便。

§4.2 雅可比法

雅可比法是解标准特征值问题的方法之一，适用于 A 是实对称矩阵的情况，可同时求得全部特征值和特征向量．计算简便，收敛迅速，是解小规模问题最合适的方法。

基本步骤

0）准备

预备二维数组(n 行 n 列)，并存入单位矩阵。

1）选择旋转中心[1]

在矩阵 A 的非对角线元素 $a_{ij}(i\neq j)$中，找一个绝对值最大的元素(若最大的有多个，则在其中任选一个)，设它的行编号为 p，列编号为 q。

2）决定旋转角

求

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2a_{pq}}{a_{pp}-a_{qq}}, \tag{22}$$

令

$$c=\cos\theta,\quad s=\sin\theta. \tag{22'}$$

若 $a_{pp}=a_{qq}$(或它们非常接近)，则令 $\theta=\pi/4$(或 $\theta=-\pi/4$，两者结果相同)。

3）行运算

对 $j=1, 2, \cdots, n$ 作下述运算：

$$\begin{aligned}&\text{新 } a_{pj}=ca_{pj}+sa_{qj},\\&\text{新 } a_{qj}=-sa_{pj}+ca_{qj}.\end{aligned} \tag{23}$$

4）列运算

对 $i=1, 2, \cdots, n$ 作下列运算：

$$\begin{aligned}&\text{新 } a_{ip}=ca_{ip}+sa_{iq},\\&\text{新 } a_{iq}=-sa_{ip}+ca_{iq},\end{aligned} \tag{24}$$

1）在以后的式子中，a_{pq} 叫旋转中心。

$$新\ t_{ip}=ct_{ip}+st_{iq},$$

$$新\ t_{iq}=-st_{ip}+ct_{iq}. \tag{24'}$$

注意，上式右边出现的元素应使用在行运算中变换了的新值。

5）收敛判别

若非对角线元素的绝对值还较大，则返回步骤 1）。

6）输出结果

$$\lambda_1=a_{11},\ \lambda_2=a_{22},\ \cdots,\ \lambda_n=a_{nn};$$

$$x_1=\begin{Bmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{Bmatrix},\quad x_2=\begin{Bmatrix} t_{12} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{Bmatrix},\quad \cdots,\quad x_n=\begin{Bmatrix} t_{1n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{Bmatrix}, \tag{25}$$

算法的根据

步骤 3)、4）是分别进行下面变换：

$$新\ A=PAQ,\ 新\ T=TQ, \tag{26}$$

式中，

$$P=\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & c & & s & \\ & & \ddots & & \\ & s & & c & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow 第\ p\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ q\ 行 \\ \\ \end{matrix} \tag{27}$$

第 p 列　第 q 列

（在对角线上一部分的元素为 1，空白部分为 0）；

$$Q=P^T. \tag{28}$$

由于在 P 和 Q 之间有性质

$$PQ=QP=I\quad (I\ 是单位矩阵) \tag{28'}$$

上述变换意味着将特征值问题

$$Ax=\lambda x$$

变换为相同形式的新的特征值问题：

$$(新\ A)(新\ x)=\lambda(新\ x), \tag{29}$$

$$
\text{新} A = PAQ,
$$

$$
\text{新} \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}. \tag{30}
$$

步骤 2)是决定 θ、c，s，使得在步骤 4)结束时有

$$
\text{新} a_{pq} = \text{新} a_{qp} = 0.
$$

步骤 1)是使所有的非对角线元素(还未趋于 0 的元素)都进行上述运算。

因此，按这个步骤作下去，A 的非对角线元素的绝对值逐渐变小，很快就达到可以忽略的程度。应注意变成零的元素在以后变换中又会变成非零值。可以证明，虽然个别元素的绝对值暂时会增大，但所有非对角线元素的平方和单调减小并收敛于 0 。于是，式(29)变为

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{x} \\ \\ \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{x} \\ \\ \end{bmatrix}.
$$

显然，它的特征值和特征向量是

$$
\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}, \quad \cdots, \quad \lambda_n = a_{nn};
$$

$$
\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{31}
$$

若对上式顺次应用式(30)作逆变换就可得到原问题的特征向量(原问题的特征值与变换后的特征值相同)。

更具体地说，将原特征值问题写成

$$
A^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} = \lambda \boldsymbol{x}^{(1)}.
$$

若用 $P^{(k)}$、$Q^{(k)}$表示第 k 次变换矩阵，式(29)成为

$$
A^{(k+1)} = P^{(k)} A^{(k)} Q^{(k)}, \tag{32}
$$

式(30)成为

$$x^{(k+1)}=P^{(k)}x^{(k)},\tag{33}$$

它的逆变换是

$$x^{(k)}=Q^{(k)}x^{(k+1)}。\tag{34}$$

采用以上方法求原问题特征向量 $x^{(1)}$ 的公式为

$$x^{(1)}=Q^{(1)}Q^{(2)}\cdots Q^{(k)}x^{(k+1)}.\tag{35}$$

用式(31)各式作为 $x^{(k+1)}$ 代入上式有

$$[x_1^{(1)} \mid x_2^{(1)} \mid \cdots \mid x_n^{(1)}]=Q^{(1)}Q^{(2)}\cdots Q^{(k)}\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}\tag{36}$$

它可按下列格式运算：

$$T^{(k+1)}=T^{(k)}Q^{(k)}=Q^{(1)}Q^{(2)}\cdots Q^{(k)}.\tag{37}$$

这运算过程就是式(26右)。

编制程序时注意事项

1) 利用对称性

上述 $A^{(1)}$，$A^{(2)}$，…都是对称矩阵，利用这个性质可以只计算矩阵的右上(或左下)部分，计算工作量可减少一半(但 T 不对称)。

2) 简化旋转中心的选择

矩阵规模增大到某种程度以后，步骤 1)"找最大值"所需要的时间剧增〔步骤 3)、4)的运算数目是 n 次，找最大值的运算数目是 n^2 次〕。因此，不按绝对值大小顺序选择旋转中心，而按编号顺序进行计算，例如按

$$p=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

$$q=p+1,\ p+2,\ \cdots,\ n$$

的顺序。若 $|a_{pq}|$ 小于某个数值，则跳过该元素进行下一个，扫描一遍(p, q 的所有组合)后，判别是否收敛．若在非对角线元素中还剩下绝对值大的元素．则返回上述循环的开始。

3) 直接计算 c，s 的方法

式(22)的 θ 只用来计算 c 和 s。应当寻找适当的公式直接由 a_{pp}，a_{pq}，a_{qq} 计算 c，s。这样的公式很多，威尔金逊(Wilkinson)推荐以下公式[1]：

$$\alpha=(a_{pp}-a_{qq})/2,$$

$$\beta=\sqrt{\alpha^2+a_{pq}^2},$$

---

1) J.H.Wilkinson: The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford(1965).

$$\varepsilon=\mathrm{sign}(a_{pp}-a_{qq}),$$
$$c=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\varepsilon\alpha}{\beta}},$$
$$s=\varepsilon a_{pq}/(2\beta c).$$

4) 因为矩阵 A 已全部变换，若须要保存，应在步骤 0)中预先复制。

MK 型问题的情况

MK 型问题可用下述广义雅可比法解决。如果采用第 3 章式(63)至式(65)的方法将 MK 型问题变换成标准型问题后，也可用普通的雅可比法(本节所述)计算。以往常采用这一处理方法。为了作参考，给出程序 4.2 作为这方法的例子。

程序 4.1　经典的雅可比法

求得矩阵 A 的全部特征值和特征向量后，存入 E 和 V 数组中。MAX 是最大迭代次数(指定)。参数 OUT 是打印信息，若为 0.0，输出中间结果；若为 1.0，输出最详细的中间结果；若为 0.0 与 1.0 之间的值，输出相应此值的详细中间结果。以后的程序也同样处理。

```
      SUBROUTINE JAC(A,E,V,N,OUT,MAX)
      DIMENSION A(N,N),E(N),V(N,N)
      INTEGER P,Q
      NM1=N-1
      DO 1 I=1,N
      DO 2 J=1,N
    2 V(I,J)=0.0
    1 V(I,I)=1.0
C
      DO 100 KAISUU=1,MAX
      IF(OUT.GE.0.5) WRITE(6,3)A,V
    3 FORMAT(1H ,5E15.7)
      P=1
      Q=2
      DO 5 I=1,NM1
      IP1=I+1
      DO 5 J=IP1,N
      IF(ABS(A(I,J)).LE.ABS(A(P,Q)))GO TO 5
      P=I
```

```
      Q=J
    5 CONTINUE
      IF(OUT.GE.0.5)WRITE(6,6)P,Q
    6 FORMAT(1H0,2I6)
      IF(ABS(A(P,Q)).LT.0.00001)GO TO 73
      R=2.0 * A(P,Q)/(A(P,P) - A(Q,Q))
      IF DIVIDE CHECK 7,8
    7 T=0.78539818
      GO TO 9
    8 T=0.5 * ATAN(R)
    9 CONTINUE
      IF(OUT.GE.0.5)WRITE(6,10)T
   10 FORMAT(1H, E15.7/)
      S=SIN(T)
      C=COS(T)
      DO 11 J=1,N
      APJ=A(P,J)
      AQJ=A(Q,J)
      A(P,J)=APJ * C + AQJ * S
      A(Q,J)= -APJ * S + AQJ * C
      VPJ=V(P,J)
      VQJ=V(Q,J)
      V(P,J)=VPJ * C + VQJ * S
      V(Q,J)= - VPJ * S + VQJ * C
   11 CONTINUE
      DO 12 I=1,N
      AIP= A(I,P)
      AIQ=A(I,Q)
      A(I,P) = AIP * C+ AIQ * S
      A(I,Q)= - AIP * S + AIQ * C
   12 CONTINUE
  100 CONTINUE
   73 DO 13 I=1,N
   13 E(I)=A(I,I)
      RETURN
```

```
      END
```

程序 4.2 MK型特征值问题的经典解法

下接程序 4.1 使用

```
      SUBROUTINE GJC(A,B,CAC,Q,M,N)
      DIMENSION A(N,N),B(N,N),D(10),Q(N,N)
     1 ,S(10,10),C(10,10),AC(10,10),CAC(10,10)
     2 ,P(10,10)
      NC=10
      IF(M-1) 9,10,100
100   CONTINUE
      CALL CHL(B,S,M)
      DO 1 I=1,M
      DO 2 J=1,M
2     C(I,J)=0.0
1     C(I,I)=1.0
      MM1=M-1
      DO 3 L=1,MM1
      K=M-L+1
      KM1=K-1
      DO 5 J=K,M
      C(K,J)=C(K,J)/S(K,K)
      DO 6 I=1,KM1
6     C(I,J)=C(I,J)-S(I,K)*C(K,J)
5     CONTINUE
3     CONTINUE
      DO 7 J=1,M
      C(1,J)=C(1,J)/S(1,1)
7     CONTINUE
      CALL MUL(A,C,AC    ,M,M,M,NC,NC,NC,NC,NC,NC)
      CALL MUL(C,AC,CAC,M,M,M,NC,NC,NC,NC,NC,NC)
      CALL JAC (CAC,D,P,M,0.5,30)
      CALL MUL(C   ,P,Q    ,M,M,M,NC,NC,NC,NC,NC,NC)
      RETURN
9     WRITE(6,66) M
```

```
66    FORMAT(14H GJAC ERROR M=,I5)
      STOP
10    D(1)=A(1,1)/B(1,1)
      IF ACCUMULATOR OVERFLOW 12,11
11    Q(1,1)=1.0
      RETURN
12    WRITE(6,67)A,B,M
67    FORMAT(18H GJAC EROOR A,B,M= ,2E15.7,I5)
      STOP
      END

      SUBROUTINE MUL(A,B,C,L,M,N,MA,NA,MB,NB,MC,NC)
      DIMENSIOM A(MA,NA),B(MB,NB),C(MC,NC)
      DO 1 I=1,L
      DO 1 J=1,N
      C(I,J)=0.0
      DO 1 K=1,M
 1    C(I,J)=C(I,J)+A(K,I)*B(K,J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE WUL(A,B,C,L,M,N,MA,NA,MB,NB,MC,NC)
      DIMENSION A(MA,NA),B(MB,NB),C(MC,NC)
      DO 2 I=1,L
      DO 2 J=1,N
      C(I,J)=0.0
      DO 2 K=1,M
 2    C(I,J)=C(I,J)+A(K,I)*B(K,L)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE CHL(A,S,N)
      DIMENSION A(N,N),S(N,N)
      DOUBLE PRECISION W
      IF(A(1,1))900,900,1
 1    S(1,1)=SORT(A(1,1))
```

```
      IF(N.EQ.1) RETURN
      DO 2 J=2,N
      S(1,J)=A(1,J)/S(1,1)
    2 CONTINUE
      DO 3 I=2,N
      IM1=I-1
      W=0.0D-40
      DO 5 K=1,IM1
      W=W+S(K,I)**2
    5 CONTINUE
      W=A(I,I)-W
      IF(W) 900,900,6
    6 S(I,I)=SQRT(W)
      IF(I.EQ.N) RETURN
      IP1=I+1
      DO 7 J=IP1,N
      W=0.0D-40
      DO 8 K=1,IM1
      W=W+S(K,I)*S(K,J)
    8 CONTINUE
      S(I,J)=(A(I,J)-W)/A(I,I)
    7 CONTINUE
    3 CONTINUE
      RETURN
  900 WRITE(6,9) I
    9 FORMAT(32H ERROR IN CHOLESKI DECOMPOSITION /3H I=
     1 I3)
      STOP
      END
```

§ 4.3 广义雅可比法

广义雅可比法适用于 M，K 是实对称矩阵的 MK 型特征值问题，它可同时求得全部特征值和特征向量．适宜于小型问题

基本步骤

0）准备

预备二维数组 T（n 行 n 列），并存入单位矩阵。

1） 选择旋转中心

在矩阵 M，K 的非对角线元素 m_{ij}， k_{ij}（$i \neq j$）中，找绝对值最大的元素（若最大的元素有多个，则在其中任选一个）。取

$$|m_{ij}|/\sqrt{m_{ii}^2+m_{jj}^2}, \qquad |k_{ij}|/\sqrt{k_{ii}^2+k_{jj}^2} \tag{39}$$

两者中较大的一个作为旋转中心，设它的行编号为 p，列编号为 q。

2） 确定 α 和 γ

作

$$a=\begin{vmatrix} k_{pp} & k_{pq} \\ m_{pp} & m_{pq} \end{vmatrix}, \quad b=\begin{vmatrix} k_{pp} & k_{qq} \\ m_{pp} & m_{qq} \end{vmatrix}, \quad c=\begin{vmatrix} k_{pq} & k_{qq} \\ m_{pq} & m_{qq} \end{vmatrix}, \tag{40}$$

解二次方程

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0, \tag{41}$$

设它的一个根为 α。令

$$\gamma=(a/c)\alpha. \tag{42}$$

3） 行运算

对于 $j=1, 2, \cdots, n$ 作下述运算

$$\left.\begin{aligned} &\text{新 } k_{pj}=k_{pj}+\gamma k_{qj}, \\ &\text{新 } k_{qj}=k_{qj}+\alpha k_{pj}, \\ &\text{新 } m_{pj}=m_{pj}+\gamma m_{qj}, \\ &\text{新 } m_{qj}=m_{qj}+\alpha m_{pj}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

4）列运算

对 $i=1,2,\cdots, n$ 作下述运算：

$$
\left.
\begin{aligned}
&新\ k_{ip} = k_{ip} + \gamma k_{iq},\\
&新\ k_{iq} = k_{iq} + \alpha k_{ip},\\
&新\ m_{ip} = m_{ip} + \gamma m_{iq},\\
&新\ m_{iq} = m_{iq} + \alpha m_{ip},\\
&新\ t_{ip} = t_{ip} + \gamma t_{iq},\\
&新\ t_{iq} = t_{iq} + \alpha t_{ip}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{44}
$$

[illegible]收敛判别

在K、M的非对角线元素中若还有绝对值较大的元素则返回步骤1）。

6）特征值和特征向量

特征值为：

$$\lambda_1 = k_{11}/m_{11},\ \cdots,\ \lambda_n = k_{nn}/m_{nn}; \tag{45}$$

相应的特征向量为：

$$x_1 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{bmatrix},\ \cdots,\ x_n = \begin{bmatrix} t_{1n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{bmatrix}. \tag{46}$$

7）[illegible]

[illegible]作如下变换：

$$新K = PKQ，新M = PMQ，新T = TQ。 \tag{47}$$

式中，

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & \gamma & \\ & & \ddots & & \\ & \alpha & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 第\,p\,行 \\ \\ \leftarrow 第\,q\,行 \end{matrix} \tag{48}$$

第 p 列　第 q 列

（在对角线上'·.部分的元素为1，空白部分为0）。

$$Q = P^T \tag{49}$$

现在P，Q之间虽不存在上述式(28′)那样的关系，但对原问题

作下列运算后仍可变成和原来性质相同的广义特征值问题。原题

$$Kx=\lambda Mx$$ [1]

左乘P，并进行变量置换

$$新x=Q^{-1}x \quad 即x=Q（新x），\tag{50}$$

有

$$PKQ(新x)=\lambda PMQ(新x),\tag{51}$$

即

$$(新K)(新x)=\lambda(新M)(新x).\tag{52}$$

这时，步骤3)的结果为：

$$\begin{aligned}
&新k_{pp}=k_{pp}+\gamma k_{pq}, \quad 新m_{pp}=m_{pp}+\gamma m_{qp},\\
&新k_{qq}=k_{qq}+\alpha k_{pq}, \quad 新m_{qq}=m_{qq}+\alpha m_{pq},\\
&新k_{pq}=k_{pq}+\gamma k_{qq}, \quad 新m_{pq}=m_{pq}+\gamma m_{qq},\\
&新k_{qp}=k_{qp}+\alpha k_{pp}, \quad 新m_{qp}=m_{qp}+\alpha m_{pp}.
\end{aligned}\tag{53}$$

再加步骤4)运算后有：

$$新k_{pp}=\tilde{k}_{pp}-2\gamma\tilde{k}_{pq}+\gamma^2\tilde{k}_{qq},$$

$$新k_{qq}=\tilde{k}_{qq}+2\alpha\tilde{k}_{pq}+\alpha^2\tilde{k}_{pp},\tag{54}$$

$$新k_{pq}=\alpha\tilde{k}_{pp}+(1+\alpha\gamma)\tilde{k}_{pq}+\gamma\tilde{k}_{qq},\tag{55}$$

$$新k_{qp}=同上,$$

$$新m_{pp}=\tilde{m}_{pp}+2\gamma\tilde{m}_{pq}-\gamma^2\tilde{m}_{qq},\tag{56}$$

$$新m_{qq}=\tilde{m}_{qq}+2\alpha\tilde{m}_{pq}+\alpha^2\tilde{m}_{pp},$$

$$新m_{pq}=\alpha\tilde{m}_{pp}+(1+\alpha\gamma)\tilde{m}_{pq}+\gamma\tilde{m}_{qq},\tag{57}$$

$$新m_{qp}=同上.$$

这里，$\tilde{k}_{ij}$，$\tilde{m}_{ij}$表示用步骤3)变换前的(原来的)k_{ij}、m_{ij}值，而式(44)右边的k_{ij}、m_{ij}表示用步骤 3) 变换后的新值。步骤2) 决定α和γ，使得

$$k_{pq}=0, \qquad m_{pq}=0.\tag{58}$$

实际上，若用m_{pq}乘式(55)减去用k_{pq}乘式(57)，消去第二项得

$$\alpha(k_{pp}m_{pq}-k_{pq}m_{pp})+\gamma(k_{qq}m_{pq}-k_{pq}m_{qq})=0.\tag{59}$$

1) 原文误为$kx=\lambda x$.——译注

即

$$a\alpha = c\gamma,$$

$$\therefore \qquad \gamma = (a/c)\alpha. \tag{60}$$

另外，用m_{qq}乘式(55)，用k_{qq}乘式(57)，求两者的差，消去第3项得：

$$\alpha(k_{pp}m_{qq} - k_{qq}m_{pp}) + (1 + \alpha\gamma)(k_{pq}m_{qq} - k_{qq}m_{pq}) = 0. \tag{61}$$

即

$$b\alpha + c(1 + \alpha\gamma) = 0 \tag{62}$$

若将$\gamma = (a/c)\alpha$代入上式，整理后得式(41)。

照此运算下去，K，M非对角线元素的绝对值将逐渐变小，很快达到可以忽略的程度。于是，式(52)成为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{bmatrix}. \tag{63}$$

显然，它的特征值和特征向量是：

$$\lambda_{11} = k_{11}/m_{11}, \quad \lambda_{22} = k_{22}/m_{22}, \quad \cdots, \quad \lambda_{nn} = k_{nn}/m_{nn}; \tag{64}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{65}$$

把上式代入式(50)，依次进行逆变换就得到原问题的特征向量(特征值相同)。

更具体地说，将原来的特征值问题写为

$$K^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} = \lambda M \boldsymbol{x}^{(1)\ 1)},$$

若设$P^{(k)}$,$Q^{(k)}$表示第k次变换矩阵，式(47)是

---

1) 原文误为$K^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} = \lambda \boldsymbol{x}^{(1)}$. ——译注

$$K^{(k+1)} = P^{(k)} K^{(k)} Q^{(k)};$$
$$M^{(k+1)} = P^{(k)} M^{(k)} Q^{(k)}. \tag{66}$$

式(50)[1] 是

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (Q^{(k)})^{-1} \boldsymbol{x}^{(k)}. \tag{67}$$

其逆变换是

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = Q^{(k)} \boldsymbol{x}^{(k+1)}. \tag{68}$$

继续使用上式，原问题的特征向量 $x^{(1)}$ 为

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = Q^{(1)} Q^{(2)} \cdots Q^{(k)} \boldsymbol{x}^{(k+1)}. \tag{69}$$

把式(65)[2]各式代入上式的 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 有

$$[\boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_2 \mid \cdots \mid \boldsymbol{x}_n] = Q^{(1)} Q^{(2)} \cdots Q^{(k)} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \tag{70}$$

它可按下列格式运算：

$$T^{(k+1)} = T^{(k)} Q^{(k)} = Q^{(1)} Q^{(2)} \cdots Q^{(k)}. \tag{71}$$

这运算过程就是式(47右)。

编制程序注意事项

1) 对称性的利用

由于上述 $K^{(1)}$，$K^{(2)}$，…和 $\boldsymbol{M}^{(1)}, \boldsymbol{M}^{(2)}$，…都是对称矩阵，若很好利用对称性，计算工作量将减少一半(但 T 不是对称的)。

2) 简化旋转中心的选择

与雅可比法相同，也可以按编号顺序选择旋转中心，此外，用式(39)时最好按

$$m_{ij}^2/(m_{ii}^2+m_{jj}^2) \quad k_{ij}^2/(k_{ii}^2+k_{jj}^2) \tag{72}$$

比较大小

3) 计算 α 和 γ 的另一方法

设[3]

$$\alpha = c/x, \quad \gamma = a/x, \tag{74}$$

式(41)变为

$$x^2 + bx + ac = 0. \tag{73}$$

---

1) 原文误为式(49)。——译注

2) 原文误为式(67)。——译注

3) 将 $\alpha = c/x$ 代入式(41)再乘 x^2/c 得式(73)。

按这方法计算，即使 $a=0$ 也不必担心改变问题的性质。此外，虽然在理论上说可以采用二次方程的任一个根，但通常使根号前的符号与 b 的符号相同，这可避免由于对消而使精度降低（再简单一些，可先将两个根都求出，然后选择绝对值大的一个）。

4）因为矩阵 A 已全部变换，若要保存 A 应在步骤 0）时预先复制。

程序 1.3　广义雅可比法

求 $Ku=\lambda Mu$ 的特征值、特征向量（全部）。存入相应数组 E、U 中。

```
      SUBROUTINE GJAC (K,M,U,E,N,NK,DUMP)
      REAL K,M
      INTEGER P,Q
      DIMENSION K(NK,NK),M(NK,NK),U(NK,NK),E(NK)
      NM1=N-1
      IF(DUMP.LT.0.1) GO TO 21
      WRITE(6,22) N,NK
   22 FORMAT(19H ENTER GJACK. N,NK=,2I5/9H I,J,K,M=)
      WRITE(6,23) ((I,J,K(I,J),M(I,J),I=1,N),J=1,N)
   23 FORMAT(1H ,2I5,2E17.7)
   21 CONTINUE
      FMK=0.0
      FMM=0.0
      DO 24 I=1,N
      DO 24 J=1,N
      FMK=AMAX1(FMK,ABS(K(I,J)))
      FMM=AMAX1(FMM,ABS(M(I,J)))
   24 CONTINUE
      FAC=0.00001
      EPSK=FMK*FAC
      EPSM=FMM*FAC
      KFAC=5
      KMAX=KFAC*N*N
      INT=1.0/DUMP
      AK=1.0E-30
      DO 1 I=1,N
```

```
      DO 2 J=1,N
      U(I,J)=0.0
    2 CONTINUE
      U(I, I)=1.0
    1 CONTINUE
      DO 3 KAISUU=1,KMAX
      P=1
      Q=2
      IF(MOD(KAISUU,2).EQ.1) GO TO 5
      AK=ABS(K(1,2))
      DO 6 I=1,NM1
      IP1=I+1
      DO 6 J=IP1,N
      A=ABS(K(I,J))
      IF(AK.GE.A) GO TO 6
      P=I
      Q=J
      AK=A
    6 CONTINUE
      GO TO 7
    5 CONTINUE
      AM=ABS(M(1,2))
      DO 8 I=1, NM1
      IP1=I+1
      DO 8 J=IP1,N
      A=ABS(M(I,J))
      IF(AM. GT. A) GO TO 8
      P=I
      Q=J
      AM=A
    8 CONTINUE
    7 CONTINUE
      D1=K(P,P) * M(P,Q)-K(P,Q) * M(P,P)
      D2=K(Q,Q) * M(P,Q)-K(P,Q) * M(Q,Q)
      D3=K(P,P) * M(Q,Q)-K(Q,Q) * M(P,P)
```

```
      D=D3*D3+4.0*D1*D2
      S=SQRT(D)
      X=(D3+S)*0.5
      IF(D3 .LT. 0.0) X=(D3-S)*0.5
      A=D2/X
      G=-D1/X
      DO 10 J=1,N
      W=K(P,J)
      K(P,J)=K(P,J)+G*K(Q,J)
      K(Q,J)=K(Q,J)+A*W
      W=M(P,J)
      M(P,J)=M(P,J)+G*M(Q,J)
      M(Q,J)=M(Q,J)+A*W
   10 CONTINUE
      DO 11 I=1,N
      W=K(I,P)
      K(I,P)=K(I,P)+G*K(I,Q)
      K(I,Q)=K(I,Q)+A*W
      W=M(I,P)
      M(I,P)=M(I,P)+G*M(I,G)
      M(I,Q)=M(I,Q)+A*W
      W=U(I,P)
      U(I,P)=U(I,P)+G*U(I,Q)
      U(I,Q)=U(I,Q)+A*W
   11 CONTINUE
      IF((AK.LT.EPSK).AND.(AM.LT.EPSM)) GO TO 73
    3 CONTINUE
      WRITE(6,13)
   13 FORMAT(25H GJAC WA KMAX DE UCHIKIRI)
   73 CONTINUE
      IF(DUMP.LT.0.01) GO TO 35
      WRITE(6,36) KAISUU,AK,AM
   36 FORMAT(26H GJAC OWARI. KAISUU, AK, AM=,I5,2E17.7)
   35 CONTINUE
```

```
      DO 14 I=1,N
      E(I)=K(I, I)/M(I, I)
   14 CONTINUE
      RETURN
      END
```

§ 4.4 豪斯霍尔德法

这方法是解实对称矩阵标准特征值问题的方法之一，是一种非常出色的方法。但由于在理论上和实际计算步骤上都相当复杂，要详细说明需要相当的篇幅，所以本书只记述其要点[1]。

概要

设原矩阵为 $A^{(1)} \equiv A$，依 $k=1,2,\cdots,n-2$ 顺次作变换：

$$A^{(k+1)}=P^{(k)}A^{(k)}P^{(k)}, \tag{75}$$

改变每一行（同时改变每一列）使成三重对角矩阵。可从左上角起顺次三重对角化，也可从右下角起顺次三重对角化。下面介绍前一个方法（左上角法）。进行变换使 $A^{(k+1)}$ 变成以下形式：

$A^{(k-1)}=$ 0 0 对称矩阵 k行 k列 (75′)

左上⩛表示全部三重对角化的部分。

基本步骤

0）准备

准备二维数组 T（n 行 n 列），预先存入单位矩阵 I，并先设 $k=1$。

1）关于其理论背景可参考：戸川隼人，マトリクス数値計算（オーム社）。数值实例和程序可参考：一松、戸川，計算機による数値計算法（新曜社）。

1）变换

$$s = \sqrt{\sum_{j=k+1}^{n} a^2_{kj}}, \tag{76}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad u_i = \begin{cases} 0 & (i \leqslant k) \\ a_{ik} - s & (i = k+1) \\ a_{ik} & (i \geqslant k+2), \end{cases} \tag{77}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u}, \\ c_2 &= 2/c_1, \\ \boldsymbol{w} &= c_2 A \boldsymbol{u}, \\ c_3 &= (1/c_1)\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{w} - c_3 \boldsymbol{u}, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

$$\text{新 } A = A - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T - \boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T, \tag{79}$$

$$\boldsymbol{g} = c_2 T \boldsymbol{u},$$

$$\text{新 } T = T - \boldsymbol{g}\boldsymbol{u}^T. \tag{80}$$

2）结束判别

若 $k < n-2$，取

$$\text{新 } k = k+1,$$

返回步骤 1）。

3）随后的运算

求三重对角化矩阵 A 的特征值 λ、特征向量 $\boldsymbol{y}$（用适当的方法只计算需要的个数）。这个 λ 就是原问题的特征值；对 $\boldsymbol{y}$ 作变换

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}, \tag{81}$$

就得到原问题的特征向量。

算法根据

式(76)—(79)是作下述运算

$$\text{新 } A = PAP. \tag{82}$$

式中，

$$P = I - 2\frac{uu^T}{u^Tu}. \tag{83}$$

式（82)、(83) 和式（79）是一致的。式（83）可写成

$$P = I - c_2uu^T.$$

于是有

$$\begin{aligned} \text{新 } A &= (I - c_2uu^T)A(I - c_2uu^T) \\ &= A - c_2uu^TA - c_2Auu^T + c_2^2uu^TAuu^T \\ &= A - uw^T - wu^T + c_2^2uu^TAuu^T. \end{aligned} \tag{84}$$

因 u^TAu 是标量，u 和 u^T 可互换，上式最后一项为：

$$\begin{aligned} \text{最后一项} &= (4/c_1^2)uu^TAuu^T \\ &= (2/c_1^2)uu^Tu^TAu + (2/c_1^2)u^TAuuu^T \\ &= (c_2/c_1)u(u^TAuu)^T + (c_2/c_1)(u^TAuu)u^T \\ &= (1/c_1)u(u^Twu)^T + (1/c_1)(u^Twu)u^T \\ &= u(c_3u)^T + (c_3u)u^T. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \text{式(84)右边} &= A - u(w - c_3u)^T - (w - c_3u)u^T \\ &= A - uv^T - vu^T. \end{aligned}$$

上式与式（79）一致，即步骤 1）的内容就是执行式(82)。其次，证明这样建立的新 A 就是式（75′)。即有

$$\text{新 } a_{ik} = 0，\text{新 } a_{ki} = 0 \quad (i = k+1, \cdots, n). \tag{85}$$

设 a 是 A 的第 k 列向量，对 A 左乘 P 后第 k 列成为 Pa；对 A 右乘 P 后，A 的第 k 列不变。设

$$Pa = b. \tag{86}$$

式中，

$$
P=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & 0 & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
 & & & * & * & * \\
 & 0 & & * & * & * \\
 & & & * & * & *
\end{array}\right]
\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}k\text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}
,\quad
\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_{1k}\\ a_{2k}\\ \vdots\\ \vdots\\ a_{nk}\end{bmatrix},\quad
\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_{k-1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.
$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{k\text{ 列}}$

因

$$a_{1k}=a_{2k}=\cdots=a_{k-2,k}=0,$$

按式(75)变换后这些值不变，有

$$b_1=b_2=\cdots=b_{k-2}=0.$$

由于对称性，当第 k 列被三重对角化的同时第 k 行也被三重对角化。

因为重要的是脚标 $k+1$ 以后的部分，所以只注意这些项。设

$$\tilde{\boldsymbol{a}}=\begin{bmatrix} a_{k+1,k}\\ \vdots\\ \vdots\\ a_{nk}\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{b}}=\begin{bmatrix} b_{k+1,k}\\ \vdots\\ \vdots\\ b_{nk}\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{e}}=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \tag{87}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}=\tilde{\boldsymbol{a}}-s\tilde{\boldsymbol{e}}. \tag{88}$$

$$\tilde{P}=I-c_2\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{u}}^T.$$

式中，I 是 $n-1$ 阶单位矩阵；c_2 与前述相同，$c_2=2/c_1$；与 $\boldsymbol{u}$ 类似，$\tilde{\boldsymbol{u}}$ 也有关系

$$c_1=\tilde{\boldsymbol{u}}^T\tilde{\boldsymbol{u}}. \tag{89}$$

现在，应当证明的是

$$\tilde{P}\tilde{\boldsymbol{a}}=\tilde{\boldsymbol{b}}. \tag{90}$$

据 $\tilde{P}$ 的定义可直接验证 $\tilde{P}$ 有性质

$$\tilde{P}^T\tilde{P}=I. \tag{91}$$

因此有

$$b_{k+1}^2=\tilde{\boldsymbol{b}}^T\tilde{\boldsymbol{b}}=\tilde{\boldsymbol{a}}^T\tilde{P}^T\tilde{P}\tilde{\boldsymbol{a}}=\tilde{\boldsymbol{a}}^T\tilde{\boldsymbol{a}}=s^2, \tag{92}$$

$$\therefore \qquad b_{k+1}=s$$

（关于符号，以后说明）。即

$$\tilde{\boldsymbol{b}}=s\tilde{\boldsymbol{e}}, \tag{93}$$

$$\therefore \qquad \tilde{\boldsymbol{u}}=\tilde{\boldsymbol{a}}-\tilde{\boldsymbol{b}}. \tag{94}$$

上面这些关系式将在下面的推导中使用。式（90）可写作

$$(I-c_2\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{u}}^T)\tilde{\boldsymbol{a}}=\tilde{\boldsymbol{b}}. \tag{95}$$

即

$$\tilde{\boldsymbol{a}}-c_2\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{u}}^T\tilde{\boldsymbol{a}}=\tilde{\boldsymbol{b}}. \tag{95'}$$

移项后得

$$\tilde{\boldsymbol{u}}=c_2\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{u}}^T\tilde{\boldsymbol{a}}. \tag{95''}$$

此式可证明如下。式的右边为（为简单起先省写～号）

$$c_2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{a}=\frac{2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^T}{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}\boldsymbol{a}$$

$$=\frac{2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}}.$$ [1]

由式（29）知

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b},$$

又，一般地有

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a},$$

故

$$c_2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{a}=\frac{2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a})}{2(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a})}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}.$$

于是式（90）得证。

按 $k=1,2,\cdots,n-2$ 顺次对 A 作上述运算，结果 $A^{(n-2)}$成为三重对角线矩阵。设其特征值为 λ，特征向量为 $\boldsymbol{y}$，则

1）原书公式有误，现已改正。——译注

$$A^{(n-2)}y=\lambda y. \tag{96}$$

因为有

$$A^{(n-2)}=P^{(n-3)}A^{(n-3)}P^{(n-3)}$$
$$=P^{(n-3)}\cdots P^{(2)}P^{(1)}A^{(1)}P^{(1)}P^{(2)}\cdots P^{(n-3)}, \tag{97}$$

令*

$$Q=(P^{(1)})^{-1}(P^{(2)})^{-1}\cdots(P^{(n-3)})^{-1}$$
$$=P^{(1)}P^{(2)}\cdots P^{(n-3)}, \tag{98}$$

把式（97）代入式（96）并两边左乘Q得

$$A^{(1)}Qy=\lambda Qy.$$

因此知

$$x=Qy \tag{99}$$

是原问题的特征向量。令

$$T^{(k)}=P^{(1)}P^{(2)}\cdots P^{(k)}$$
$$=T^{(k-1)}\cdot P$$
$$=T^{(k-1)}(I-c_2uu^T)$$
$$=T^{(K-1)}-(c_2T^{(K-1)}u)u^T,$$
$$Q=T^{(n-3)}, \tag{100}$$

按这种形式建立的Q的式子就是步骤1)中的式(80)。

编制程序注意事项

1) 对称性的利用

由于各阶段的A都是对称的，利用这一特点编制优秀的程序，约可节省一半的存贮量和计算工作量。

2) s符号的决定

按通常解释，式(76) s 该是正的，但实际上在式（76）的根号前加上负号，式(92)仍然成立。为了防止在式(77)

$$u_{k+1}=a_{k+1,k}-s$$

---

* 各$P^{(k)}$有性质

$$(P^{(k)})^TP^{(k)}=I,\quad (P^{(k)})^T=P^{(k)},$$
$$P^{(k)}P^{(k)}=I,\quad (P^{(k)})^{-1}=P^{(k)},$$

证明与式(91)相同。

免计算中两项相消，s 的符号最好与 $a_{k+1,k}$ 的符号一致。

3）计算特征向量的另一方案

也可预先保存各阶段的 α(或 $\tilde{\alpha}$)值来计算特征向量，而不采用式(80)。

4）$c_1=0$ 时的处理

若 $c_1=0$，则式(78)中的分母为零。仔细研究一下后知 $c_1=0$ 意味着 $\alpha=0$，此时应有

$$A^{(k+1)}=A^{(k)},$$

故可跳过式(78)—(80)，进入随后的计算。

5）只计算右下角

在式(76)—(80)中仅计算注有 $(k+1)$ 到 n 脚标的元素就已足够，虽然第 k 行第 k 列也被变换，但显然有

$$\text{新 } a_{ik}=\text{新 } a_{ki}=\begin{cases} s & (i=k+1) \\ 0 & (i>k+1), \end{cases} \tag{101}$$

故计算可省略。

6）原信息的保存

通常由于将［新 A］和 A 存贮在相同的地方，原来矩阵已全部改变，若要保存 A，应预先复制副本。

程序 4-4 豪斯豪尔德法(变换为三重对角矩阵)

将对称矩阵 A 变换为具有相同特征值的三重对角线矩阵。结果存贮在原来存 A 的单元。

```
      SUBROUTINE EVH(A,N)
      REAL L
      DIMENSION A(N,N),R(300),R4(300),S(300),T(300)
      DOUBLE PRECISION W
 1000 CONTINUE
      NM2=N-2
C
      DO 100 K=1,NM2
      KP1=K+1
      W=0.0
      DO 1 M=KP1,N
      W=W+A(K,M)**2
```

```
    1  CONTINUE
       L=SQRT(W)
       IF(A(K,KP1).GT.0.0) L=-L
       DO 2 I=KP1,N
       R(I)=A(K,I)
    2  CONTINUE
       R(K)=0.0
       R(KP1)=R(KP1)-L
       R2=2.0*L*(L-A(K,KP1))
       R3=-2.0/R2
       DO 3 I=K,N
       R4(I)=-R3*R(I)
    3  CONTINUE
       DO 4 I=K,N
       W=0.0
       DO 5 J=K,N
       W=W+A(I,J)*R4(J)
    5  CONTINUE
       S(I)=W
    4  CONTINUE
       W=0.0
       DO 6 I=K,N
       W=W+R(I)*S(I)
    6  CONTINUE
       R5=W/R2
       DO 7 I=K,N
       T(I)=S(I)-R5*R(I)
    7  CONTINUE
       DO 8 I=K,N
       DO 9 J=I,N
       A(I,J)=A(I,J)-T(I)*R(J)-R(I)*T(J)
       A(J,I)=A(I,J)
    9  CONTINUE
    8  CONTINUE
```

```
      DO 14 I=1,N
      WRITE(6,11) (A(I,J),J=1,N)
11    FORMAT(5(1H ,E15.7/))
14    CONTINUE
100   CONTINUE
      RETURN
      END
```

§4.5 广义特征值问题的情况

即使是广义特征值问题也能够按同样方法将A变换为窄带状矩阵。

对于MK型问题的豪斯霍尔德法

按下述步骤可将MK型特征值问题(2)五重对角化。

0) 准备

令

$$M^{(0)}=M,\quad K^{(1)}=K,\quad T^{(0)}=I,\quad k=1。\qquad (102)$$

1) P变换

按豪斯霍尔德变换(右下$n-k$行$n-k$列)

$$M^{(k+1/2)}=P^{(k)}M^{(k)}P^{(k)}\qquad (103)$$

使M的第k行第k列三重对角化。为了保持特征方程的平衡，对K也作同样变换

$$K^{(k+1/2)}=P^{(k)}K^{(k)}P^{(k)}。\qquad (104)$$

2) Q变换

对于上述的$K^{(k+1/2)}$再进行豪斯霍尔德变换，但比P变换少一圈($n-k-1$行$n-k-1$列)。

$$K^{(k+1)}=Q^{(k)}K^{(k+1/2)}Q^{(k)},\qquad (105)$$

使K的第k行第k列五重对角化。为了保持特征方程的平衡，对M也进行同样变换

$$M^{(k+1)}=Q^{(k)}M^{(k+1/2)}Q^{(k)}。\qquad (106)$$

3) 计算T

$$T^{(k+1)}=T^{(k)}P^{(k)}Q^{(k)}. \tag{107}$$

4）迭代控制

若 $k<n-3$，令新 $k=k+1$，反回步骤 1)。

5）以后的运算

解五重对角矩阵的特征值问题：

$$K^{(n-2)}y=\lambda M^{(n-2)}y. \tag{108}$$

它的特征值 λ 就是原问题(2)的特征值，相应的特征向量为

$$x=Ty. \tag{109}$$

看来没有必要详细说明算法的根据。总而言之，其基本方法是在 P 变换中仅把 M 变成预期的形式，然后，在 Q 变换中将 K 也变成预期的形式。困难在于：Q 变换时把好不容易得到的预期形式的 M 打乱了。为此，应采用以下形式的 Q。（这一点是三重对角矩阵做不到的，而五重对角矩阵可以做到。）

$$Q^{(k)}=\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \tilde{Q} \end{array}\right)$$

$$M^{(k+1/2)}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & & s & 0 \\ \hline & s & * & ** \\ \hline & 0 & \begin{matrix}* \\ *\end{matrix} & \begin{matrix}** \\ **\end{matrix} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } k+1 \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } k+2 \text{ 行} \end{array}$$

P 变换和 Q 变换的具体步骤如下：

$$s=\sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} m_{ki}^2},$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix},\quad u_i=\begin{cases}0 & (i\leqslant k)\\ m_{ik}-s & (i=k+1)\\ m_{ik} & (i\geqslant k+2),\end{cases}$$

$c_1=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$, $c_2=2/c_1$,

$\boldsymbol{w}=c_2M\boldsymbol{u}$,

$c_3=(1/c_1)\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}$,

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}-c_3\boldsymbol{u}$,

新 $M=M-\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T-\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T$,

$\boldsymbol{w}=c_2K\boldsymbol{u}$,

$c_3=(1/c_1)\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}$,

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}-c_3\boldsymbol{u}$,

新 $K=K-\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T-\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T$,

$\boldsymbol{g}=c_2T\boldsymbol{u}$,

新 $T=T-\boldsymbol{g}\boldsymbol{u}^T$.

$$s=\pm\sqrt{\sum_{i=k+2}^{n}k_{ik}^2},$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix},\quad u_i=\begin{cases}0 & (i\leqslant k+1)\\ k_{ik}-s & (i=k+2)\\ k_{ik} & (i\geqslant k+3),\end{cases}$$

$c_1=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$, $c_2=2/c_1$,

$\boldsymbol{w}=c_2M\boldsymbol{u}$,

$c_3=(1/c_1)\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}$,

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}-c_3\boldsymbol{u}$,

新 $M=M-\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T-\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T$,

$\boldsymbol{w}=c_2K\boldsymbol{u}$,

$c_3=(1/c_1)\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}$,

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}-c_3\boldsymbol{u}$,

新$K = K - uv^T - vu^T$,

$g = c_2 T u$,

新$T = T - gu^T$.

上述式中 u, v, w, c_3 的值虽改变多次，但由于作用相同，故可使用相同的存贮单元。这种做法与 FORTRAN 程序的书写形式是一致的。

对于 MK 型问题的吉文斯法

标准特征值问题的解法还有吉文斯法[1]。这里，把广义雅可比法的变换矩阵扩展和组合，可以建立将 MK 型问题变换成五重对角矩阵的一种算法。即用

$$P_{kl} = \left(\begin{array}{c|cccccc} I & & & 0 & & & \\ \hline & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & \underset{\uparrow\,第\,l\,列}{0} & \underset{\uparrow\,第\,l+1\,列}{\alpha_k} & \underset{\uparrow\,第\,l+2\,列}{\beta_k} & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow 第\,l\,行 \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第\,k\,行 \\ \\ \end{array} \tag{110}$$

进行如下变换

$$\begin{cases} l = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ \begin{cases} k = l+3,\ l+4,\ \cdots,\ n \\ 新M = P_{kl} M P_{kl}^T & (111) \\ 新K = P_{kl} K P_{kl}^T, & (112) \end{cases} \end{cases}$$

在每次变换中，应当根据

1）参阅户川隼人，マトリクスの数值計算（オーム社）。

$$新\ m_{kl}=0 \quad 新\ k_{kl}=0 \tag{113}$$

来决定 α_k 和 β_k。其变换如下：

$$\begin{cases} j=1,\ 2,\ \cdots,\ n^{1)} \\ 新\ m_{kj}=m_{kj}+\alpha_k m_{l+1,j}+\beta_k m_{l+2,j} \\ 新\ k_{kj}=k_{kj}+\alpha_k k_{l+1,j}+\beta_k k_{l+2,j} \end{cases} \tag{114}$$

$$\begin{cases} i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ 新\ m_{ik}=m_{ik}+\alpha_k m_{i,l+1}+\beta_k m_{i,l+2} \\ 新\ k_{ik}=m_{ik}+\alpha_k k_{i,l+1}+\beta_k k_{i,l+2}. \end{cases} \tag{115}$$

为了使结果为

$$\begin{aligned} &新\ m_{kl}=m_{kl}+\alpha m_{l+1,l}+\beta m_{l+2,l}=0 \\ &新\ k_{kl}=k_{kl}+\alpha k_{l+1,l}+\beta k_{l+2,l}=0, \end{aligned} \tag{116}$$

应解上述联立方程，并以其解 α、β 作为 α_k，β_k。根据克莱姆法则：

$$\alpha=\Delta_1/\Delta,\quad \beta=\Delta_2/\Delta, \tag{117}$$

这里

$$\begin{aligned} \Delta&=\begin{vmatrix} m_{l+1,l} & m_{l+2,l} \\ k_{l+1,l} & k_{l+2,l} \end{vmatrix}, \\ \Delta_1&=\begin{vmatrix} -m_{kl} & m_{l+2,l} \\ -k_{kl} & k_{l+2,l} \end{vmatrix}, \\ \Delta_2&=\begin{vmatrix} m_{l+1,l} & -m_{kl} \\ k_{l+1,l} & -k_{kl} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{118}$$

当 $\Delta=0$，且 Δ_1，Δ_2 也为0时，可任意规定 α，β 中的一个，代入式(116)求另一个(用两个式子的任一个都可得同样结果)。若 Δ_1，Δ_2 中至少有一个不为零，则此联立方程式无解，在这种情况下可交换第 m 行($m\geqslant l+3$)和第 $l+2$ 行(同时交换第 m 列和第 $l+2$ 列)，再计算 Δ、Δ_1、Δ_2。

为了避免发生上述情况以及提高精度，可以采用高斯消去法

---

1) 实际上可以仅计算 $j\geqslant l$，$i\geqslant l$ 部分，其他不变。

和选择旋转中心。这时，以下面四个数

$$\begin{matrix} m_{l+1,l} & k_{l+1,l} \\ m_{l+2,l} & k_{l+2,l} \end{matrix}$$

为旋转中心(但由于第 $l+1$ 行不动，行交换对象仅是 $m_{l+2,l}$ 和 $k_{l+2,l}$)。它的选择准则是

(Δ 的绝对值)→最大.

这虽稍微复杂一些，但也不会花费太多的时间。

MCK 型问题的情况

同理，可使 MCK 型特征值问题七重对角化。若采用豪斯霍尔德法，可以在下述运算中

$$\left[\begin{array}{l} k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-3 \\ \quad M^{(k+1)}=R^{(k)}Q^{(k)}P^{(k)}M^{(k)}P^{(k)}Q^{(k)}R^{(k)} \\ \quad C^{(k+1)}=R^{(k)}Q^{(k)}P^{(k)}C^{(k)}P^{(k)}Q^{(k)}R^{(k)} \\ \quad K^{(k+1)}=R^{(k)}Q^{(k)}P^{(k)}K^{(k)}P^{(k)}Q^{(k)}R^{(k)} \end{array}\right. \tag{119}$$

应用以下三个豪斯霍尔德变换：

P 变换　将 $M^{(k)}$ 的第 k 列三重对角化，

Q 变换　将 $P^{(k)}C^{(k)}$ 的第 k 列五重对角化，

R 变换　将 $Q^{(k)}P^{(k)}K^{(k)}$ 的第 k 列七重对角化。

另外，若采用吉文斯法，可在下述运算中

$$\left[\begin{array}{l} l=1,\ 2,\ \cdots,\ n-4 \\ \quad \left[\begin{array}{l} k=l+4,\ l+5,\ \cdots,\ n \\ \quad \text{新 } M=P_{kl}MP_{kl}^T \\ \quad \text{新 } C=P_{kl}CP_{kl}^T \\ \quad \text{新 } K=P_{kl}KP_{kl}^T \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{120}$$

应用变换矩阵 P_{kl}，其中，

$$\begin{aligned} &p_{k,l+1}=\alpha,\ p_{k,l+2}=\beta,\ p_{k,l+3}=\gamma, \\ &p_{ii}=1(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \\ &p_{ij}=0(\text{除上述元素外}). \end{aligned} \tag{121}$$

在各阶段恰当地规定 α，β，γ 的值，以使

$$新\ m_{ki}=新\ c_{ki}=新\ k_{ki}=0。$$

为此，可根据以下方程来决定系数 α、β，γ：

$$\begin{aligned}
&m_{ki}+\alpha m_{i+1,i}+\beta m_{i+2,i}+\gamma m_{i+3,i}=0,\\
&c_{ki}+\alpha c_{i+1,i}+\beta c_{i+2,i}+\gamma c_{i+3,i}=0,\\
&k_{ki}+\alpha k_{i+1,i}+\beta k_{i+2,i}+\gamma k_{i+3,i}=0.
\end{aligned}\tag{122}$$

§ 4.6 斯特姆法

设对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

称它的左上方的子行列式（$k=1,\cdots,n$）为主子行列式，用 d_k 表示：

$$\begin{aligned}
&d_1=a_{11},\\
&d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\\
&d_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\\
&\cdots,\\
&d_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix},\\
&\cdots,\\
&d_n=\det(A).
\end{aligned}\tag{123}$$

定义

$$d_0\equiv 1.$$

设数列

$$d_0\ d_1\ d_2\ \cdots\ d_n$$

的符号变化次数为 ν(使 $d_i d_{i+1}<0$ 的次数)，则存在下列有趣的性质：

定理 a 在 A 的特征值中有 ν 个为负值。

若 $A-\lambda I$ 的主子行列式

$$d_0(\lambda)\equiv 1,\quad d_1(\lambda)=a_{11}-\lambda,$$

$$d_2(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix},$$

$$d_3(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix},$$

$$\cdots$$

$$d_n(\lambda)=\det(A-\lambda I) \tag{124}$$

的符号变化次数为 $\nu(\lambda)$，则有性质：

定理 b 在 A 的特征值中比 λ 小的有 $\nu(\lambda)$ 个（A 是对称矩阵）。

对于 MK 型特征值问题（设 K、M 对称，M 正定），设 $K-\lambda M$ 的主子行列式

$$d_0(\lambda)\equiv 1,\quad d_1(\lambda)=k_{11}-\lambda m_{11},\quad \cdots$$

$$d_k(\lambda)=\begin{vmatrix} k_{11}-\lambda m_{11} & k_{12}-\lambda m_{12} & \cdots & k_{1n}-\lambda m_{1n} \\ k_{21}-\lambda m_{21} & k_{22}-\lambda m_{22} & \cdots & k_{2n}-\lambda m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1}-\lambda m_{n1} & k_{n2}-\lambda m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\lambda m_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\cdots$$

$$d_n(\lambda)=\det(K-\lambda M) \tag{125}$$

的符号变化次数为 $\nu(\lambda)$，则有性质：

定理 c 在特征值问题 $K\boldsymbol{x}=\lambda M\boldsymbol{x}$ 的特征值中，比 λ 小的有

$\nu(\lambda)$个。

这些性质虽然十分奇妙，但作如下分析，其道理是不难理解的。首先研究定理 b，将绝对值非常大的负数(设为$-\infty$)代入

$$d_0(\lambda) \quad d_1(\lambda) \quad d_2(\lambda) \quad \cdots \quad d_n(\lambda)$$

后，对于全部的 k 有

$$d_k(\lambda) \cong \begin{vmatrix} |\lambda| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda| \end{vmatrix} > 0,$$ （事实上，其他项可忽略）

因此 d_0，d_1，$\cdots$，d_n 的符号为

$$+ + \cdots +,$$

符号变化次数为 0 。另一方面，将绝对值非常大的正数代入 λ 后，有

$$d_k(\lambda) \cong \begin{vmatrix} -|\lambda| & & \\ & \ddots & \\ & & -|\lambda| \end{vmatrix},$$ （事实上，其他项可忽略）

当 k 为偶数时其符号为正，当 k 为奇数时其符号为负，d_0，d_1，d_2，$\cdots$，d_n 的符号为

$$+ - + - + - + \cdots,$$

因此，符号变化次数为 n，其次，研究一下在上述特小值和特大值之间的各个 $d_k(\lambda)$的符号：

$d_0(\lambda)$为$+ + + + + + + + + + + +$,

$d_1(\lambda)$为$+ + + - + + - - - - - -$,

$d_2(\lambda)$为$+ + + - - - - - - - + + +$.

以下同理。一般地，

$d_k(\lambda)$为 k 项式，所以符号改变 k 次.

(因为是实对称矩阵，没有复数特征值，所以 $d_k(\lambda)$有 k 个实根。此外，本书略去有重复特征值的讨论)。更进一步研究得知有性质，

$$\text{若 } d_k(\lambda)=0 \text{ 则 } d_{k-1}(\lambda)d_{k+1}(\lambda)<0 \qquad (126)$$

上式称作替换条件。虽然它是使这类定理成立的最重要的条件，但由于证明太长，这里暂先承认，以后再加以说明。它的直接结果是

$\nu(\lambda)$值只在$d_n(\lambda)$的零点处改变。

事实上，当λ值由$-\infty$到$+\infty$连续变化时，使得$\nu(\lambda)$值变化的点虽然应该是某些$d_k(\lambda)$符号改变的点(即它的零点)，但若$k<n$，由替换条件知，只有四种可能性：

$$\begin{matrix} d_{k-1}(\lambda)\text{的符号} \\ d_k(\lambda)\text{的符号} \\ d_{k+1}(\lambda)\text{的符号} \end{matrix} \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix},$$

而$\nu(\lambda)$的数值并未变化。所以，$\nu(\lambda)$的值若改变必然是在它以外(即$d_n(\lambda)$)的零点。

在$d_n(\lambda)$的零点处，$\nu(\lambda)$的值确实发生变化，其变化量是1或-1。因$d_n(\lambda)$的零点只有n个，且$\nu(-\infty)=0$，$\nu(+\infty)=n$，所以λ由$-\infty$变到$+\infty$时，每通过$d_n(\lambda)$的一个零点，$\nu(\lambda)$就增加1，否则就不合逻辑。因此，

$$\begin{aligned}\nu(\lambda) &= \text{比 } \lambda \text{ 小的“} d_n \text{ 的零点”的个数} \\ &= \text{比 } \lambda \text{ 小的“} A \text{ 的特征值”的个数，}\end{aligned}$$

这就是定理 b 的依据。至于定理 a，可以看成是定理 b 在$\lambda=0$时的特殊情况，所以不需再作证明。下面研究定理 c。首先，将绝对值很大的负数代入

$$d_0(\lambda) \quad d_1(\lambda) \quad \cdots \quad d_n(\lambda)。$$

对k的各个值有[1]

$$d_k(\lambda) \cong |\lambda| \det(M;\ k) > 0$$

[这里，$\det(M;k)$是M的第k主子行列式]。因此

$$\nu(\lambda)=0。$$

又，用绝对值非常大的正数代入后有

---

1) 正定矩阵的主子行列式的值都是正的(假设为负，则这一子块矩阵具有负特征值，对其相应的特征向量补充0元素而得到的特征向量x，有$x^T Mx<0$)。

$$d_k(\lambda) \cong (-1)^{(k)} |\lambda| \det(M ; k).$$

因此，

$$\nu(\lambda) = n.$$

以后的讨论和定理 b 的情况相仿。

最后，我们来证明替换条件式(123)确实成立。

1）若 A 为对称的三重对角矩阵，替换条件成立。

2）根据豪斯霍尔德法，可将对称矩阵变换成三重对角矩阵。

3）执行豪斯霍尔德变换，主子行列式符号不变。对于 MK 型问题，还要增加两条：

4）在 MK 型特征值问题中，若 K 对称，M 对称正定，则可以变换为关于对称矩阵的标准特征值问题。

5）在进行上述变换时，主子行列式的符号不变。

关于 1）的证明如下：

设

$$\alpha_i = a_{i,i}, \quad \beta_i = a_{i,i+1} = a_{i+1,i},$$

$$d_k(\lambda) = \left| \begin{array}{c:c} \text{取到 } d_{k-2}(\lambda) & \\ \hdashline \text{取到 } d_{k-1}(\lambda) & \beta_{k-1} \\ \hdashline \beta_{k-1} & \alpha_k - \lambda \end{array} \right|$$

$$= (\alpha_k - \lambda) d_{k-1}(\lambda) - \beta_{k-1}^2 d_{k-2}(\lambda), \qquad (127)$$

若 $d_{k-1}(\lambda) = 0$，则

$$d_k(\lambda) = -\beta_{k-1}^2 d_{k-2}(\lambda).$$

即 $d_k(\lambda)$ 和 $d_{k-2}(\lambda)$ 反号。

关于 2）的证明见 §4.4。

关于 3）的证明，可回顾豪斯霍尔德法的步骤(§4.4)，对 k 的各值有

$$A_k^{(n)} = A_k^{(k)} = P_k^{(k)} \cdots P_1^{(k)} A_k^{(1)} P_1^{(k)} \cdots P_k^{(k)}.$$

而

$A_k^{(i)}=A^{(i)}$的左上 k 行 k 列的部分，

另外，一般地"行列式的积"和"积的行列式"之间有如下关系：

$$\det(XY)=\det(X)\det(Y), \tag{128}$$

(这里，X 和 Y 是方阵，证明见代数教科书)。因此

$$\det(A_k^{(n)})=\{\det(P_k^{(k)}\cdots P_1^{(k)})\}^2\det(A_k^{(1)}). \tag{129}$$

关于 4) 的证明见第三章式(64)。

关于 5) 的证明与上述 3) 的证明相仿。

以上是从数学观点证明。若从物理观点看，对于 MK 型问题可以进行更直接的证明。这时，$d_k(\lambda)$ 的零点 λ 是用 M 和 K 的左上方的 k 行 k 列所构成的特征值问题

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{k1} & \cdots & k_{kk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

的特征值。因为这是对原结构加上约束条件

$$x_{k+1}=0,\ x_{k+2}=0,\ \cdots,\ x_n=0$$

时的特征值($=\omega^2$)，即仅仅是 $x_1,\cdots,x_k$ 部分的特征值。设 i 按从小到大的顺序编号，第 i 个 λ 为 $\lambda_k^{(i)}$；j 按从大到小的顺序编号，第 j 个 λ 为 $\lambda_k^{(k-j+1)}$。从物理意义考虑应为

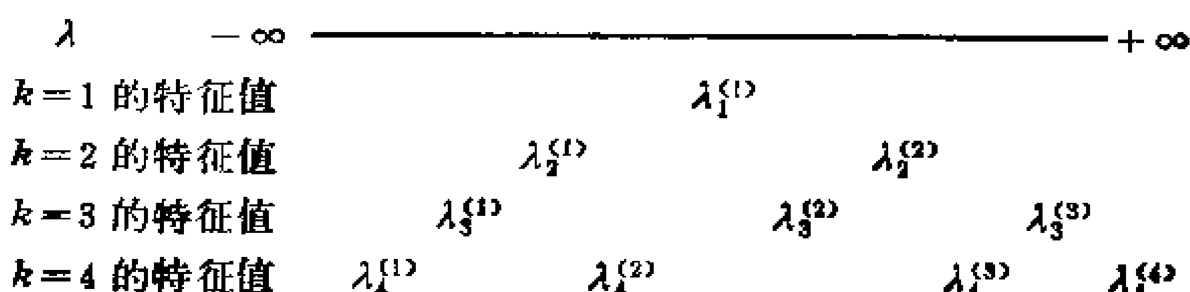
$$\lambda_n^{(i)}<\lambda_{n-1}^{(i)}<\cdots<\lambda_i^{(i)}, \tag{130}$$

$$\lambda_n^{(n-j+1)}>\lambda_{n-1}^{(n-j)}>\cdots>\lambda_{n-j+1}^{(1)}. \tag{131}$$

由于它们对所有 i，j，k 都成立，即

$$\lambda_k^{(i)}<\lambda_{k-1}^{(i)}<\lambda_k^{(i+1)}, \tag{132}$$

以图解表示为



综合考虑前述条件：

若 $\lambda \ll 0$，则 $d_0>0$，$d_1>0$，$\cdots$，$d_n>0$. 可见替换条件成立。

另一方面，从数学观点更一般地考虑，设连续函数序列 $d_0(x)$，$d_1(x)$，$\cdots$，$d_n(x)$ 具有下列性质：

1）$d_0(x)$ 的符号一定；

2）$d_k(x)$ 和 $d_{k-1}(x)$ 不同时为零；

3）若 $d_k(x)=0$ 则 $d_{k-1}(x)d_{k+1}(x)<0$；

4）若 $d_n(x)=0$ 则 $d_{n-1}(x)d'_n(x)>0$.

［对各 k 值 2)3) 成立］。可以证明，在函数 $d_n(x)$ 的零点中比 λ 小的个数与

$$d_0(\lambda) \quad d_1(\lambda) \quad d_2(\lambda) \quad \cdots \quad d_n(\lambda)$$

的符号变化个数 $\nu(\lambda)$ 相等。这就是斯特姆定理。在高次代数方程数值解中它也得到应用[1]。

二分法

利用以上性质，可按下列步骤求相应于第 k（从小的一边算起）编号的特征值。

0）准备

确定确实含有 λ_k 的区间 $[\lambda_L, \lambda_R]$。在振动问题中特征值通常是正的，若没有可靠的依据，可令

$$\lambda_L = 0.$$

由于标准特征值问题有性质："特征值不超过 A 中每行元素绝对值的和的最大值"，因此取

$$\lambda_R = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

1）参见户川隼人著，矩阵数值計算（オーム）。

是安全可靠的。在 MK 型问题中，将“拟质量矩阵”写成对角矩阵形式

$$M' = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}.$$

可取

$$\lambda_R = \max_i \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{n} |k_{ij}|.$$

当已经求得某个特征值时，可以把它设为 λ_L 或 λ_R。若有按经验估计的 λ_k 值，也可取其 2 倍或 3 倍作为 λ_R。

为慎重起见，确定 λ_L，λ_R 时，应先研究一下是否确实有

$$\nu(\lambda_L) < k, \quad k < \nu(\lambda_R).$$

1）分割

调查在区间$[\lambda_L, \lambda_R]$的中点 λ_M 处符号变化的次数，判断 λ_k 在左半部分还是右半部分；把包含λ_k的半区间作为新的$[\lambda_L, \lambda_R]$，即

$$\lambda_M = (\lambda_L + \lambda_R)/2, \tag{133}$$

$$\begin{aligned} &若\ \nu(\lambda_M) < k，则新\ \lambda_L = \lambda_M, \\ &若\ \nu(\lambda_M) \geq k，则新\ \lambda_R = \lambda_M. \end{aligned} \tag{134}$$

2）结束的判别

若区间宽度$(\lambda_R - \lambda_L)$足够小，令

$$\lambda_k = (\lambda_L + \lambda_R)/2,$$

计算结束。

在步骤 1）中，所得的 λ_M 偶尔会恰好等于 λ_k，此时，按步骤 1）计算 $\nu(\lambda_M)$ 有 $d_n(\lambda_M) = 0$。但 $d_n(\lambda) = 0$ 只意味着“λ_M 是特征值”，为了核实是否确实是 k 编号的特征值 λ_k，要计算

$$d_0(\lambda_M),\ d_1(\lambda_M),\ \cdots,\ d_{n-1}(\lambda_M)$$

符号变化的次数，若它恰好是 $k-1$，则可断定 $\lambda_k = \lambda_M$。

主子行列式的计算方法

斯特姆方法的成败与主子行列式的计算有关，若花费时间太长将失去实用价值；若采用稳定性差的算法将溢出而失败；若 $d_k(\lambda)$ 的计算误差过大往往改变其符号，导致错误的判断。

通常，主子行列式可按下述方法计算：

1）三重对角线的情况

按照前述的要点进行下面的计算：

$$d_0=1,$$

$$d_1=a_{11}-\lambda,$$

$$\begin{cases} k=2,3,\cdots,n \\ d_k=(a_{kk}-\lambda)d_{k-1}-a_{k,k-1}^2 d_{k-2}. \end{cases} \tag{135}$$

但当

$$a_{k,k-1}=0 \text{ 且 } d_{k-1}=0$$

时，令

$$d_k=-d_{k-2}(a_{kk}-\lambda),$$

$$d_{k+1}=(a_{k+1,k+1}-\lambda)d_k-a_{k,k-1}^2(-d_{k-2}). \tag{136}$$

因为替换条件[式(126)]是斯特姆定理成立的前提，对于三重对角线的情况，要满足替换条件必须假定

$$a_{k,k-1}^2>0.$$

粗略看来，当 $a_{k,k-1}=0$ 时斯特姆法不能应用（事实上，若 $a_{k,k-1}=0$ 且 $d_k=0$，则以后的 d_i 都为零，符号变化的次数与特征值不一致）。

然而，仔细分析后发现，若 $a_{k,k-1}=0$（因为 A 对称，故有 $a_{k-1,k}=0$），有

$$\det(A-\lambda I)=\left|\begin{array}{c|c} A_1-\lambda I_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2-\lambda I_2 \end{array}\right|$$

$$=\det(A_1-\lambda I_1)\cdot\det(A_2-\lambda I_2).$$

其中，

$$
A_1-\lambda I_1=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1}-\lambda \end{bmatrix},
$$

$$
A_2-\lambda I_2=\begin{bmatrix} a_{kk}-\lambda & a_{k,k+1} & & & \\ a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}-\lambda & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}.
$$

于是，原来的特征值问题

$$\det(A-\lambda I)=0$$

可以分解为下列两个特征值问题：

$$
\begin{aligned}
&\det(A_1-\lambda I_1)=0,\\
&\det(A_2-\lambda I_2)=0.
\end{aligned}
\tag{137}
$$

在力学上这意味着非耦连振动。

分解成两个特征值问题虽然在理论上是简洁的且只花少量计算时间就可以解决，但如果想求的特征值恰好是第 k 编号的特征值，就必须综合上述二个特征值的结果。如果使 $a_{k,k-1}=0$ 的 k 值多于两个，则必须写相当复杂的程序。因此，在理论上可分为 A_1，A_2 两部分，而在程序编制上对 A_1 和 A_2 可采用数值置换的方法。

原来的值	置换值
A_2 用 $d_0\equiv 1$	d_{k-1}
A_1 用 $d_1=a_{kk}-\lambda$	$d_k=(a_{kk}-\lambda)d_{k-1}$

（以后按普通公式）

写成一般公式为

$$\text{置换值}=(\text{原来的形式})\times d_{k-1}.$$

由于

A_1 部分特征值个数 $=d_0,\cdots,d_{k-1}$ 的符号变化次数

A_2 部分特征值个数 $=d_{k-1},\cdots,d_n$ 的符号变化次数

合计 $=d_0,\cdots,d_n$ 的符号变化次数，

因此，即使 $a_{k,k-1}=0$ 也可照样使用原来的程序。

然而，当 $d_{k-1}=0$ 时不宜用这一数值，可用原来值的 $(-d_{k-2})$ 倍作置换值。这样作是为了人为地满足替换条件。

2) 三重对角线情况的另一方案

方法 1)的缺点是 $d_i(\lambda)$ 的绝对值很大，容易引起上溢或下溢。由于行列式的值由许多项相乘再迭加而得，一般说来，其绝对值将会趋于很大或很小。

幸而，在每次计算中我们需要的只是 $d_i(\lambda)$ 的符号，因此可采用脉冲计数法或采用下述方法[1]：

$$
\begin{aligned}
&\nu=0,\\
&s_1=a_{11}-\lambda,\\
&\left[\begin{array}{l}
k=2,3,\cdots,n\\
\quad s_k=a_{kk}-\lambda-a_{k,k-1}^2/s_{k-1}\\
\quad\quad \text{式中如果 } s_{k-1}=0 \text{ 则 } s_k=-1\\
\quad\quad\quad \text{如果 } s_{k-2}=0 \text{ 则 } s_k=a_{kk}-\lambda\\
\quad\quad\quad \text{如果 } s_k<0 \text{ 则 } \nu \text{ 增加 } 1。
\end{array}\right.
\end{aligned}
\tag{138}
$$

这是以主子行列式的比值

$$s_k=d_k/d_{k-1} \tag{139}$$

为主变量进行计算的。这样可以防止绝对值过大，而又不改变前述 1) 计算式内容的实质 "比值 s_k 为负的个数"相应于"d_i 符号变化的次数"。

3) MK 型问题的情况

三重对角线矩阵较简单，可按上述方法直接展开以计算行列式的值。但对于一般矩阵，直接展开计算工作量极大；应按行列式的基本运算法则(后述的 I,II,III 点)变成尽可能简单的形式后再展开

1) 引自：J. Ortega, The Givens-Householder method for symmetric matrices(Ralston 和 wilf 编 Mathematical Methods for Digital Computers，第二卷第 4 章)。

其基本方法是用高斯消去法[1]将矩阵($A=K-\lambda M$)变换成三角矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

则

$$d_k=\prod_{i=1}^{k} a_{ii}. \tag{140}$$

为使上式成立应作如下处理：

I. 将行列式一行的 α 倍加于另一行使行列式三角化。

II. 若行列式任一行增大 α 倍，行列式值也增大 α 倍，必须对 d_k 进行相应修正。

III. 若将行列式第 l 行和第 m 行交换($l<m$)，则

当 $k<l$ 时，式(140)仍成立；

当 $l\leq k<m$ 时，式(140)不成立；

当 $m\leq k$ 时，按式(140)计算的行列式值应反号。

其中第III项处理太麻烦，似应尽量避免，但却无法避开，因为在计算中随着 λ 靠近真的特征值将出现

$$\det(A)=\det(K-\lambda M)\to 0,$$

使联立方程变为病态。若不选择旋转中心(它伴有行交换)将会发生过大偏差(引起溢出或使误差过大)。

因此应尽量使用旋转中心法使计算稳定，并且尽量采用效率高的方法计算上子行列式。最近发表了一种巧妙的方法[2]，其要

---

1) 户川隼人著 有限要素法入門，第4章

2) K. K. Gupta, Recent Advances in Numerical Analysis of Structural Eigenvalue Problems.(山田，Gallagher 編，Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis，東大出版会，pp. 249—271)。

点如下：

［准备］ 令 $\sigma=1$，$d_0=1$，$d_1=a_{11}$。σ 是记录行交换时符号改变的变量。

［主子行列式的计算］

$i=2,3,\cdots,n$

(1) 到第 i 行的三角化

$k=1,\cdots,n-1$

(1.1)选择旋转中心

若 $|a_{ik}|>|a_{kk}|$ 转至(1.2)

若 $|a_{ik}|\leqslant|a_{kk}|$ 转至(1.3)

(1.2)行交换

交换第 i 行和第 k 行

使 σ 反号(新 $\sigma=-\sigma$)

(1.3)消去

首先设 $p=a_{ik}/a_{kk}$

$j=i,\cdots,n$

新 $a_{ij}=a_{ij}-pa_{kj}$

(2) 计算第 i 个主子行列式

$$d_i=\sigma\prod_{k=1}^{i}a_{kk}$$

但如果按此执行常常溢出，可采用只求符号的办法代替，即

$$\text{sign}(d_i)=\sigma\prod_{k=1}^{i}\text{sign}(a_{kk}).$$

［解释］ 步骤 1.1 如图 4.1 所示，希望为零的元素是 a_{ik}，为此，旋转中心是 a_{kk}，由于在第 i 主子行列式的计算中允许行交换的范围到第 i 行，一般说来可选择 a_{kk}，$a_{k+1,k},\cdots,a_{ik}$ 中绝对值最大的元素为旋转中心，但 $a_{k+1,k},\cdots,a_{i-1,k}$ 都已为零，比

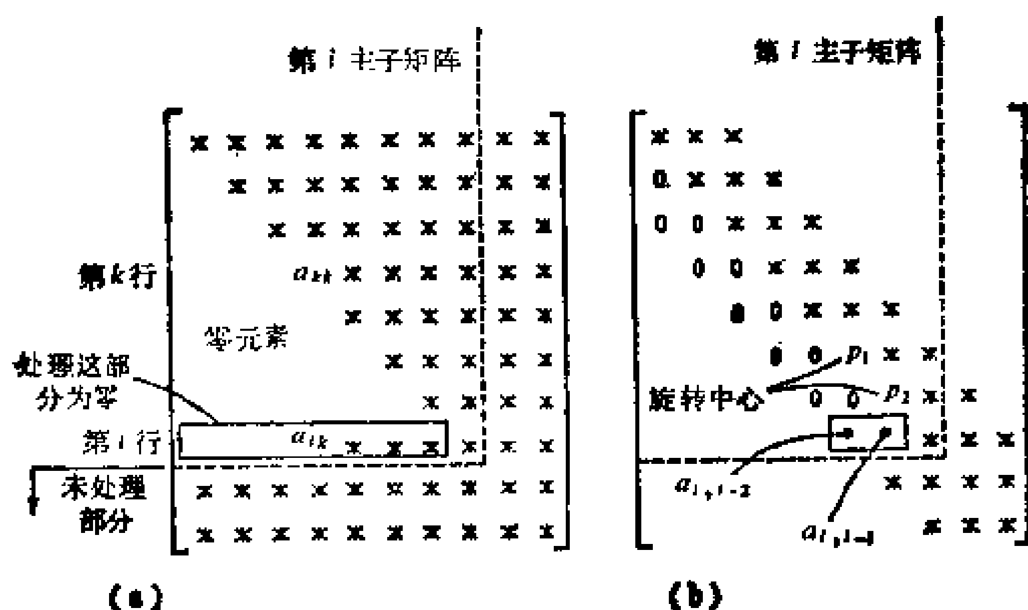


图 4.1

(a) 一般矩阵的情况 (b) 5 重对角矩阵的情况

较的对象只有 a_{kk} 和 a_{ik}，若有必要时，交换它们的位置后，使第 i 行第 k 列处为零。

4) 五重对角矩阵的情况

将 M，K 预先五重对角化后，虽可按上述 3) 方法计算，但按如下步骤控制循环(参考图 4.1 b)则只需很少计算量(约$60/n^2$)即可解决问题。

$i=2,\cdots,n$

(1) $k=i-2,\ i-1$[1)]

(1.1) 选择旋转中心

(1.2) 行交换

(1.3) $j=i-2,\cdots,i+2$[1)]

计算新 a_{ij}

(2) $d_i=d_{i-3}\times a_{i-2,i-2}\times a_{i-1,i-1}\times a_{ii}\times(\sigma_i/\sigma_{i-3})$.

1) $i=2$ 时，从 $i-1$ (即 1)开始。

程序4.5　对于MK型问题的斯特姆法

给定探索范围[EL, ER]后，求第KE编号（由小的一边算起）的特征值，存入E中，再返回上程序。IE是故障信息，IE＝1表示有重复特征值；IE＝2表示在[EL, ER]内没有该编号的特征值。EPS是规定绝对误差的上限。

```
      SUBROUTINE BS1(E,EL,ER,KE,IE,EPS)
      IF (EPS. LE.0.0) GO TO 9
      IE=0
      KL=K(EL)
      KR=K(ER)
      IF((KL . GE . KE).OR.(KR . LT.KE)) GO TO 9
C LOOP
    1 EM=(EL+ER)*0.5
      KM=K(EM)
      IF(KM .GE. KE) GO TO 2
      EL=EM
      KL=KM
      GO TO 3
    2 ER=EM
      KR=KM
    3 IF((KL+1).EQ.KR) GO TO 5
      IF((ER-EL).GT.EPS) GO TO 1
C MULTIPLE ROOT
      IE=1
      E=(EL+ER)*0.5
      RETURN
C SIMPLE ROOT
    5 CALL BS2(E,EL,ER,KE,IE,EPS)
      RETURN
C NO ROOT EXISTS IN THE SPECIFIED RANGE
    9 IE=2
      E=0
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE BS2(E, EL, ER, KE, IE, EPS)
      FL=F(EL)
      FR=F(ER)
C LOOP
    1 EM=(EL+ER)*0.5
      FM=F(EM)
      IF((FL*FM).LT.0.0) GO TO 2
      EL=EM
      FL=FM
      GO TO 3
    2 ER=EM
      FR=FM
    3 IF((ER-EL).GT.EPS) GO TO 1
      E=(EL+ER)*0.5
      RETURN
      END

      FUNCTION K(X)
      COMMON A(10,10),B(10,10),C(10,10),N
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
    1 C(I, J)=A(I,J)-X*B(I,J)
      K=0
      NM1=N-1
      DO 2 L=1, NM1
      LP1=L+1
      DO 3 J=LP1,N
    3 C(L, J)=C(L,J)/C(L,L)
      DO 5 I=LP1,N
      DO 5 J=LP1, N
    5 C(I, J)=C(I,J)-C(I,L)*C(L,J)
    2 IF(C(L, L).LT.0.0) K=K+1
      IF(C(N,N).LT.0.0) K=K+1
      RETURN
      END
```

```
FUNCTION F(X)
F=(-1.0)**K(X)
RETURN
END
```

§4.7 幂　　法

适当选取初始向量 $x^{(0)}$，按迭代格式

$$x^{(k+1)}=Ax^{(k)} \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{141}$$

求向量序列

$$x^{(1)} \quad x^{(2)} \quad x^{(3)}\cdots.$$

它收敛于与 A 的最大（绝对值）特征值相应的特征向量。利用这种性质（或与此类似的性质）计算特征值、特征向量的方法通称幂法。

在特征值为实数且没有重复的情况下，用它来计算绝对值最大的特征值是简单的，如果再加上恰当的操作，还可以计算复数特征值、重复特征值及第二编号以后的特征值。A 可以是对称或非对称的，也可以是实矩阵或复矩阵。

本法与其他方法比较，有两大优点：

1）可应用于 A 为非对称矩阵的情况。

2）可应用于特征值是复数的情况。

因此，常用来解决这类问题。此外，还有下列优点：

3）不必附加任何操作也可求得特征向量。

4）可利用 A 的稀疏特性。

5）程序比较简单。

但上述第 5）点是对基本算法而言，要扩大功能提高效率，得作细致的处理，程序还是相当复杂的。另一方面也有如下缺点：

1）对于振动问题，重要的是求小的特征值，但本法却按从大至小的顺序计算特征值。

2）对有些问题收敛性不好。

—3）求第二编号以后的特征值计算复杂。

但对上述缺点我们知道有极简洁而有效的解决办法。首先，对于—1）点可用迭代格式

$$x^{(k+1)}=A^{-1}x^{(k)} \tag{142}$$

代替式（141）。再加上原点移位的方法（以后叙述）就可以大大改善—2)、—3)。这就是下节叙述的逆迭代法。另外，解决—3）的根本方法是组合多个向量进行迭代的同时迭代法，采用同时迭代法还可去掉产生—2）的主要原因。§ 4.10 所述的子空间迭代法使逆迭代法和同时迭代法组合在一起，是一个能直接地、且高效率地处理特征值问题的算法之一，实用价值很高。

由于出现了这些优越的改进方法，最近幂法（原形）已经不大使用。因此，本节只说明必须的基本事项，以帮助理解以后的方法（逆迭代法和子空间迭代法）。

基本步骤

0）准备

作初始向量 x。

1）调整向量长度

直接应用迭代格式（141）容易引起上溢或下溢，应事先作如下处理：令

$$\text{新}\ x=x/|x|.$$

这里

$$|x|=\sqrt{x^{T}x}=x\ \text{分量平方和的平方根。}$$

也可用

$$\|x\|_0=\text{分量绝对值之和,}$$
$$\|x\|_\infty=\text{分量绝对值的最大值}$$

等代替。

2）乘法运算

作 $$y=Ax.$$

在求重复特征值（重复2次）及复数特征值（实矩阵的)时，作

$$z=Ay$$

3）收敛判别（第1级）

设

x 的分量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,

y 的分量为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$,

作两向量之比

$$r_1=y_1/x_1,\ \cdots,\ r_n=y_n/x_n, \tag{143}$$

若它的最大比值 r_{max} 和最小比值 r_{min} 的差十分小，则可把瑞雷商

$$r=\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{x^Ty}{x^Tx} \tag{144}$$

（步骤1中若设$|x|=1$则分母为1）作为特征值（最好的近似值）。计算结束

4）收敛判别（第2级）

研究x，y，z的线性相关性。即首先找满足

$$az+by+cx\cong 0$$

的a，b，c，例如可按最小二乘法来求，若设$a=-1$，则正规方程为

$$\begin{bmatrix} y^Ty & y^Tx^{1)} \\ x^Ty & x^Tx \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y^Tz \\ x^Tz \end{bmatrix} \tag{145}$$

解此式求得b，c，然后计算关于a，b，c的残差

残差：$az+by+cx$。

若它足够小[2]可视为线性相关。解二次方程

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0, \tag{146}$$

用它的根作为特征值的近似值，计算结束。又，相应于λ_1，λ_2的特征向量为

1）原文误为x^Ty。——译注

2）本来，应该用正规化的残差 $|az+by+cx|/(|a||z|+|b||y|+|c||x|)$判别，但由于$|a|=1$，$|x|=1$，故可用普通的残差代替。

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}-\lambda_2\boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}-\lambda_1\boldsymbol{x}.$$

5）迭代的控制

若收敛条件不满足，则设

新 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$（若作 $\boldsymbol{z}$ 则新 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}$）

返回步骤1）。同时统计迭代次数，若达到某个限度，则可转到第6）步。

6）不收敛的处理

经多次迭代而不收敛，原因之一可能是初始向量不恰当，可变更初始向量再算。或者研究

$$\boldsymbol{x} \quad A\boldsymbol{x} \quad A^2\boldsymbol{x} \quad \cdots \quad A^m\boldsymbol{x}$$

的相关性，解 m 次代数方程式。但即使将 m 设得很大仍容易引起很大误差，故不大可能有良好的结果。

7）聚缩

求得一个特征值后，为了求下一个特征值，常将矩阵 A 变换为只包括余下特征值的矩阵，然后应用前述算法。这种变换称为**聚缩**（*deflation*） 最简单的公式是[1]

A 对称时　新 $A=A-\lambda\,\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$,

A 非对称时　新 $A=A-\lambda\,\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$.

这里，λ 是现在已得到的特征值，$\boldsymbol{u}$ 是对应于 λ 的 A 的特征向量，$\boldsymbol{v}$ 是对应于 λ 的 A^T 的特征向量，并设已正规化 $|\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{v}|=1$。

算法根据

1）A 没有重复特征值的情况

首先设特征值为

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n,$$

而且

1）此外还有其他计算公式，详细情况可参考：平野、戸川、藤井、三好，計算技術と数値計算法（コンピュータによる構造工学講座 II-1-A，培風館）。

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|.$$

相应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{x}_n.$$

如§3.3所述，由于$\boldsymbol{x}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_n$为n维空间的基底，初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$可表示为

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n, \tag{147}$$

用A前乘，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(1)} &= A\boldsymbol{x}^{(0)} = \alpha_1 A\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n A\boldsymbol{x}_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \boldsymbol{x}_n, \\ \boldsymbol{x}^{(2)} &= A\boldsymbol{x}^{(1)} = \alpha_1 \lambda_1^2 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \boldsymbol{x}_2 - \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \boldsymbol{x}_n, \end{aligned}$$

一般地有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k)} &= \alpha_1 \lambda_1^k \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k \boldsymbol{x}_n \\ &= \lambda_1^k \left\{ \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{x}_n \right\}. \end{aligned} \tag{148}$$

i) 当$|\lambda_1| > |\lambda_2|$，若$\alpha_1 \neq 0$则$k \to \infty$时

$$\frac{1}{\alpha_1 \lambda_1^k} \boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}_1,$$

即$\boldsymbol{x}^{(k)}$（按同一数量级）收敛于绝对值最大的特征值所对应的特征向量。

ii) $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$。若$\alpha_1$，$\alpha_2 \neq 0$则$k$足够大时可略去第三项以后的项。令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \alpha_1 \lambda_1^k, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \alpha_2 \lambda_2^k,$$

近似地有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k)} &= \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{x}_2, \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\beta}_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \lambda_2 \boldsymbol{x}_2, \\ \boldsymbol{x}^{(k+2)} &= \boldsymbol{\beta}_1 \lambda_1^2 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \lambda_2^2 \boldsymbol{x}_2. \end{aligned} \tag{149}$$

由于这是线性相关的（由两个基底所产生的三个向量不可能是线性无关的），存在a，b，c满足

$$a\boldsymbol{x}^{(k+2)} + b\boldsymbol{x}^{(k+1)} + c\boldsymbol{x}^{(k)} = 0.$$

则

$$\beta_1(a\lambda_1^2+b\lambda_1+c)\boldsymbol{x}_1+\beta_2(a\lambda_2^2+b\lambda_2+c)\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 线性无关，β_1，$\beta_2\neq0$，所以

$$a\lambda_1^2+b\lambda_1+c=0$$

$$a\lambda_2^2+b\lambda_2+c=0.$$

解此二次方程得特征值λ_1,λ_2。另外，由式(149)显然有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\lambda_2\boldsymbol{x}^{(k)}&=\beta_1(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}_1,\\ \boldsymbol{x}^{(k+1)}-\lambda_1\boldsymbol{x}^{(k)}&=\beta_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2.\end{aligned}\tag{150}$$

于是得到特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$。

iii）其他各种组合情况可由上述理论类推。例如，若

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|>|\lambda_3|，且\alpha_1=0，\alpha_2\neq0，$$

得 $\boldsymbol{x}_2$ 等。

2）有重复特征值的情况

在这情况下，若能从特征向量中选择一组空间基底，则上述讨论几乎可以照搬。当

$$\lambda_1=\lambda_2\ （设\ \lambda_3\ 以后的绝对值变小）$$

时，若 k 足够大，近似地有

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\beta_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\beta_2\lambda_1\boldsymbol{x}_2=\lambda_1\boldsymbol{x}^{(k)}.$$

即使不解二次方程也能得特征值，$\boldsymbol{x}^{(k)}$ 是特征向量之一。为了求另一特征向量，应改变初始向量再计算一次，而不能用式(150)代替上式。

3）不能从特征向量中选择一组空间基底的情况。

由于这种情况的讨论冗长，本书省略。(详细内容可参阅：Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford)。这里只谈结论：即使是这种情况，上述方法仍然适用，不过收敛速度往往相当缓慢，但对于普通振动问题，由于 A 是对称的，不会发生这种情况

收敛速度

对于上述 1）i）的情况，当迭代次数少时，由于 α_1，$\cdots$，α_n

的影响大，使情况复杂化，但k足够大后，式(148)第三项以后各项可以忽略，$\boldsymbol{x}^{(k)}$中包含的误差项为

$$\boldsymbol{e}^{(k)}=\alpha_2(\lambda_2/\lambda_1)^k\boldsymbol{x}_2.$$

每迭代一次，它减少(λ_2/λ_1)倍。同样，ii)的情况也是每次减少(λ_2/λ_1)倍。

§4.8 逆迭代法

一般地，若设A的特征值为λ_1，…，λ_n，则

A^{-1}的特征值为$1/\lambda_1$，…，$1/\lambda_n$，

$A-\alpha I$的特征值为$\lambda_1-\alpha$，…，$\lambda_n-\alpha$.

实际上，对

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

左乘$(1/\lambda)A^{-1}$得

$$(1/\lambda)\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{x},$$

另外从两边减去$\alpha\boldsymbol{x}$得

$$(A-\alpha I)\boldsymbol{x}=(\lambda-\alpha)\boldsymbol{x}. \qquad (151)$$

利用这个性质，对矩阵

$$B=(A-\alpha I)^{-1}$$

应用幂法可以求得"A的最接近α的特征值"，即B的特征值：

$$\mu_1=1/(\lambda_1-\alpha),\ \cdots,\ \mu_n=1/(\lambda_n-\alpha). \qquad (152)$$

上式中，绝对值最大的μ对应于最小的$|\lambda_i-\alpha|$，因此λ_i也最接近α。用幂法求得μ_i后，可令

$$\lambda_i=\alpha+1/\mu_i. \qquad (153)$$

另外，A，B具有相同的特征向量。

这种方法称逆迭代法。特别是，若设$\alpha=0$，可求得绝对值最小的特征值。再有，如果采用其他方法求得近似特征值α，再用这种方法计算可改善精度，同时还可求得相应的特征向量。

此外，当数值趋于收敛之后，不固定α，在每轮迭代中均取特征值的近似值（在该时刻所得的最新最好的值）为α，可加速

收敛

基本步骤

0）准备

建立初始向量。

1）分解

预先对 $A-\alpha I$ 作LU分解（若对称，可作乔勒斯基分解 LL^T）。

2）调整向量长度

$$新\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|.$$

3）乘法运算

解线性方程组

$$(A-\alpha I)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x},$$

即
$$LU\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x},$$

求 $\boldsymbol{y}$。

4）收敛判别

与幂法相同。

5）改变原点移动量

当改变 α 时，由瑞雷商求当前矩阵 $(A-\alpha I)^{-1}$ 特征值的最好的近似值 μ，令

$$新\ \alpha=现\ \alpha+1/\mu.$$

6）迭代控制

令 新 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，不变更 α 时返回 2)，变更 α 时返回 1)，再重复迭代。经多次迭代仍不收敛时，采取改变初始向量等方法。

7）换算成 A 的特征值

当求得 $(A-\alpha I)^{-1}$ 的特征值 μ 后，按

$$\lambda=\alpha+1/\mu$$

换算成 A 的特征值。

备注　是否变更 α，主要按以下两个条件决定。第一个条件是 LU 分解的工作量问题。若 A 能分解成三重对角或五重对角矩阵的简单形式，可以

每次变更 α，但对于稠密矩阵，分解的工作量为$(\sim n^3)$，α 变更太频繁不是好办法。另一个条件是收敛于非预定特征值的可能性。当按其他解法求得相当近似的特征值时，可在最初用它作为 α，从第二轮迭代开始自动计算移位值 α。在没有预备数据情况下寻求最小特征值时，在脱离其他特征值的影响范围之前，必须固定 α 值。

§ 4.9 同时迭代法

将若干向量编成一组，用幂法或逆迭代法运算，同时求得多个特征值和特征向量，这一方法称为同时迭代法。这一方法的计算要领与幂法及逆迭代法大致相同，但增加了所谓正交化的处理。

基本步骤

0）准备

适当选取 m 列初始向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，通常 $m \ll n$（m 是迭代向量的列数、n 是 A 的阶数）。

1）调节向量长度

令

$$\text{新}\ \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i / |\boldsymbol{x}_i| \quad (i=1, \cdots, m), \tag{154}$$

使长度刚好为 1 。

2）乘法运算

由

$$\boldsymbol{y}_i = A\boldsymbol{x}_i \qquad (i=1, \cdots, m), \tag{155}$$

或

$$\boldsymbol{y}_i = A^{-1}\boldsymbol{x}_i \qquad (i=1, \cdots, m), \tag{155'}$$

求 $\boldsymbol{y}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{y}_m$

3）收敛判别

判别方法与幂法相同，因为用此法不要特别的运算也能得重复特征值，除求复数特征值外，不需要第二级判别。

4）正交化

使 $y_1, \cdots, y_m$ 正交化，令其结果为新 $x_1, \cdots$，新 x_m（具体步骤在下一项说明）

5）迭代控制及其他

记下迭代次数后返回1)。当迭代很多次仍不收敛时停止迭代。实施原点移动时最好取 α 大致在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 的中央。

正交化方法

在特征值问题

$$Ax = \lambda x$$

中，设 A 为对称矩阵，其特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

（它按绝对值由大至小的顺序排列）。正规化(令其长度为 1)后相应的特征向量为

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

（有重复特征值时取相互正交向量）。设同时迭代向量为

$$x_1, x_2, \cdots, x_m,$$

对它左乘 A（或 A^{-1}）后为

$$y_1, y_2, \cdots, y_m.$$

另外，把这些迭代向量汇集为长方形矩阵，设 $x_1, \cdots, x_m$ 列向量构成的矩阵（n 行 m 列）为 X；$y_1, \cdots, y_m$ 列向量构成的矩阵（n 行 m 列）为 Y。即令

$$X = \left[x_1 \middle| \cdots \middle| x_m \right], \qquad Y = \left[y_1 \middle| \cdots \middle| y_m \right].$$

显然有

$$AX = Y \quad （对于逆迭代则 A^{-1}X = Y）.$$

正交化的目的是作出新的 $x_1, \cdots, x_m$ 使与 $y_1, \cdots, y_m$ 正交。除非预先说明，在以下“具体计算步骤”中所出现的 $x_1, \cdots, x_m$ 代表新的正交化后的向量“新 $x_1, \cdots$，新 x_m”。

另外，以右上角标表示迭代次数。所谓“X正交”是指它的列向量 $x_1, \cdots, x_m$ 相互正交。

方法 1　格拉姆-施米特(Gram-Schmidt)法

最简单的正交化方法是著名的格拉姆-施米特法，其正交化步骤为：

$$
\begin{aligned}
& x_1 = y_1, \\
& x_2 = y_2 - c_{21}x_1, \\
& x_3 = y_3 - c_{31}x_1 - c_{32}x_2, \\
& \cdots, \\
& x_m = y_m - c_{m1}x_1 - c_{m2}x_2 - \cdots - c_{m,m-1}x_{m-1},
\end{aligned}
\tag{156}
$$

式中，

$$c_{ij} = (x_j^T y_i)/(x_j^T x_j). \tag{157}$$

从下式可验证向量的正交性：

$$
\begin{aligned}
x_j^T x_i &= x_j^T y_i - c_{i1}x_j^T x_1 - c_{i2}x_j^T x_2 - \cdots - c_{i,i-1}x_j^T x_{i-1} \\
&= x_j^T y_i - c_{ij}x_j^T x_j = 0.
\end{aligned}
$$

对这方法产生的正交效果作如下说明。因为 x_1 是任意设置的，与单个迭代向量的幂法(或逆迭代法)相同，当 $k\to\infty$ 时，对同一数量级

$$x_1^{(k)}\to u_1 \quad (\text{对逆迭代法 } x_1^{(k)}\to u_n),$$

(当 λ_1 重复时，收敛于特征空间的某一点，以下相同)。其次，因为在 x_2 与 x_1 正交的条件下迭代，当 $k\to\infty$ 时，

$$x_2^{(k)}\to u_2 \quad (\text{对逆迭代法 } x_2^{(k)}\to u_{n-1}).$$

以下相同，一般，当 $k\to\infty$ 时

$$x_i^{(k)}\to u_i \quad (\text{对逆迭代法 } x_i^{(k)}\to u_{n-i+1}).$$

可见这确是一个很好的动态方法。为使其收敛更好，可采取如下措施：

尽量从 x_1 中除去 $x_2, \cdots, x_m$ 的影响，

尽量从 x_2 中除去 $x_3, \cdots, x_m$ 的影响，

……。

也许初始向量偶然会发生

$$x_1 \text{ 接近 } u_1 \text{ 以外的特征向量},$$

$\cdots\cdots$，

x_m 接近 u_m 以外的特征向量

的情况，这时最好不讲究排列次序，而使其收敛于最接近的真正特征向量．为此提出如下方法．

方法 2　归结为 Y^TY 的特征值问题的方法

将 Y^T 和 Y 相乘，作出 m 行 m 列的缩小的对称矩阵

$$B = Y^TY,$$

求其特征值和特征向量（已正规化的[1]）：

$$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m;$$

$$\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_m.$$

设

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & d_m \end{bmatrix},\quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \vdots & \cdots & \vdots & \boldsymbol{p}_m \end{bmatrix}.$$

令

$$\text{新 } X = YP.$$

为了证实X是否正交，可作 X^TX．因特征向量的正交性和 $\boldsymbol{p}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_m$ 被正规化，有

$$PP^T = P^TP = I.$$

此外，第 3 章式(4.2)表明

$$B = PDP^T.$$

于是

$$X^TX = P^TY^TYP = P^TBP = P^TPDP^TP = D.$$

因为 D 是对角矩阵，这式表明 Y^T 和 X 正交．

这是一个非常简洁的好方法．其缺点是 B 的特征值与 A 的特征值不一致($d\sim\lambda^2$)，这可由下述方法改进。

1) 使用 §4.2 方法，即使不作特别加工也能求得正规化(长度为1)的特征向量。

方法 3　归结为 X^TY 的特征值问题的方法

将 X^T 和 Y 相乘，作出 m 行 m 列的缩小的矩阵

$$B=X^TY=X^TAX,$$

求其特征值和特征向量(已正规化的)：

$$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m;$$

$$\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_m.$$

$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 列向量构成矩阵 P，用 Y 右乘 P 后，令

$$新\ X=YP.$$

于是（使用正规化的旧 X 时，即 $X^TX=I$），B 的特征值是 A 特征值的近似值(其中的 m 个)。事实上，若 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 是真正的特征向量 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$，则

$$B=\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_m^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \lambda_m\boldsymbol{u}_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

虽然本法在这种意义上是成功的，但一般说来按这个方法所作的"新 X"不正交，例如，当

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

时有

$$Y=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此，

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\quad 新\ X=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

所以，

$$(新X)^T(新X)=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

不正交。

处理这个问题的方法有二：一是对这个 YP 再进行一次运算，使其正交化，这在后面方法 5 介绍；另一方法是任其违反正交性，仍然进行迭代。事实上，虽然新 X 没有通常意义的正交性，但却具有 §4.3 所述的"广义正交性"，即

$$\begin{aligned}(新X)^TA^{-1}(新X) &= P^TY^TA^{-1}YP = P^{-1}X^TAA^{-1}AXP \\ &= P^TX^TYP = P^TBP = P^TPDP^TP \\ &= D.\end{aligned}$$

因此，新 X 关于 A^{-1} 正交。

同时迭代法实施正交化的目的是避免迭代向量（其中的某些列）同时收敛于同一向量(即"粘在一起")。若具有广义正交性就可做到这一点。

方法 4　按乔勒斯基分解的方法

作

$$B=Y^TY,$$

对它作乔勒斯基分解[相当于第 3 章式(53)]

$$B=U^TU \quad (U 是右上三角矩阵)。$$

设

$$新X=YU^{-1},$$

由于

$$\begin{aligned}(新X)^T(新X) &= (U^{-1})^TY^TYU^{-1}=(U^{-1})^TBU^{-1} \\ &= (U^{-1})^TU^TUU^{-1}=I,\end{aligned}$$

这证明了新 X 的正交性。作为证明的副产物，知道新 X 已经正规化，因此可以省掉步骤1)。

这个方法与上述方法 1 虽然形式上不同，但内容非常接近，也可以说其实质是相同的。

方法 5　詹宁斯(Jennings)法

总的说来詹宁斯法是方法 3 与方法 4 的组合。首先，作

$$B=X^TY,$$

汇集它的特征向量为

$$P=[p_1 \mid \cdots \mid p_m].$$

令

$$Z=YP,$$

$$S=Z^TZ,$$

对 S 作乔勒斯基分解

$$S=U^TU.$$

则得

$$新X=ZU^{-1}.$$

§ 4.10　子空间迭代法

巴塞(Bathe) 为了解 MK 型特征值问题提出了同时迭代法的另一种方案[1]，称为**子空间迭代法**

这方法是把高阶的问题归结为解子空间特征值问题。从这个意义上说，前节的方法 2、方法 3、方法 5 也应叫子空间法，但这里仅将巴塞提出的算法称作子空间法。

基本步骤

在 K、M 正定且对称的前提下，求特征值问题

$$K\boldsymbol{x}=\lambda M\boldsymbol{x}$$

的 m 个特征值(由小的编号算起，可取比需要稍多的个数)。

0) 准备

恰当选取初始向量 $\boldsymbol{x}_1$、$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，令

$$X=[\boldsymbol{x}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{x}_m].$$

1) K. J. Bathe, Solution Methods for Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering, Doctoral Thesis, University of California Berkeley, 1971.

1）乘法运算

作

$$Z=MX.$$

解线性方程组

$$KY=Z$$

求Y，即作如下乘法运算：

$$Y=K^{-1}MX.$$

2）向子空间投影

作

$$\tilde{K}=Y^TKY \quad （实际上，即是\ \tilde{K}=Y^TZ）$$

和

$$\tilde{M}=Y^TMY,$$

它们都是m行m列的缩小的对称矩阵。

3）解子空间的特征值问题

解 MK 型特征值问题

$$\tilde{K}\boldsymbol{p}=d\tilde{M}\boldsymbol{p}$$

（可应用广义雅可比法）。将它的特征向量汇集一起，成为：

$$P=[\boldsymbol{p}_1 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{p}_m].$$

4）向原空间变换

$$新\ X=YP.$$

5）加速收敛运算

若要对同时迭代向量加上某些运算以加速收敛就在这阶段进行。

6）迭代控制

进行收敛检查，若未收敛返回1)。

7）结果的解释

迭代收敛后，$\tilde{M}$，$\tilde{K}$ 变成对角矩阵，P 成为单位矩阵，X 和 Y 都是特征向量，由步骤 3)得到的 $d_1,d_2,\cdots,d_m$ 就是特征值。考察步骤 2)完成的情况，因为 $\tilde{K}$ 和 $\tilde{M}$ 的对角元素变成

$$\bar{k}_{ii} = \boldsymbol{y}_i^T K \boldsymbol{y}_i,$$

$$\bar{m}_{ii} = \boldsymbol{y}_i^T M \boldsymbol{y}_i,$$

所以，比率 $\bar{k}_{ii}/\bar{m}_{ii}$ 就是§3.4所述的"MK 型特征值问题的瑞雷商"。它就是相应于特征向量 $\boldsymbol{y}_i$ 的特征值(相当好的近似值)。

算法的根据

从本质上说，子空间迭代法就是前述方法3，用§3.4所述方法将 MK 型问题变换成标准型式后就可应用前节方法。

但在乘法运算阶段(聚缩所需特征向量的过程)使用非对称逆迭代法，而在正交化阶段[步骤2)，3)]又可用与原问题相同的对称形式处理。这正是子空间迭代法的独特之处。

子空间迭代法的加速收敛

可以认为幂法(逆迭代法、同时迭代法、子空间迭代法相同)是"特定的特征向量聚缩过程"的迭代运算。

事实上，对于任意选取的初始向量，它可能包含有比例大体相同的各种特征向量成分，作幂法运算后，就会使特定向量扩大、其它向量缩小(显然这都是相对而言)，进行足够多次迭代后，只有特定向量成为优势向量。

若使用电学术语，幂法则是一种滤频过程。普通幂法是高通滤频器，逆迭代法是低通滤频器，其频率特性如图4.2(a)、(b)所示。图4.2(c)是带有原点移位的逆迭代法的频率特性，若只要求靠近某一特定向量时，此法显示了非常好的特性。

在同时迭代法(也包括子空间迭代法)中，希望使多个特征向量从其余的特征向量中分离出来。为此虽然通常采用具有图4.2(a)、(b)特性的过程(与§4.9，§4.10的计算式相当)，但更理想的是采用具有图4.2(d)特性的滤频器，其效率比前者还高得多。实际上，不可能得到如此理想的情况，但可作出具有相近特性的滤频器(所谓切比雪夫滤频器就具有这种特性)。在数值分析方法中，它常用来建立最好的近似式或用来加快松弛法的收敛。同时迭代法也可采用这一方法，这时，特定范围内的特征值

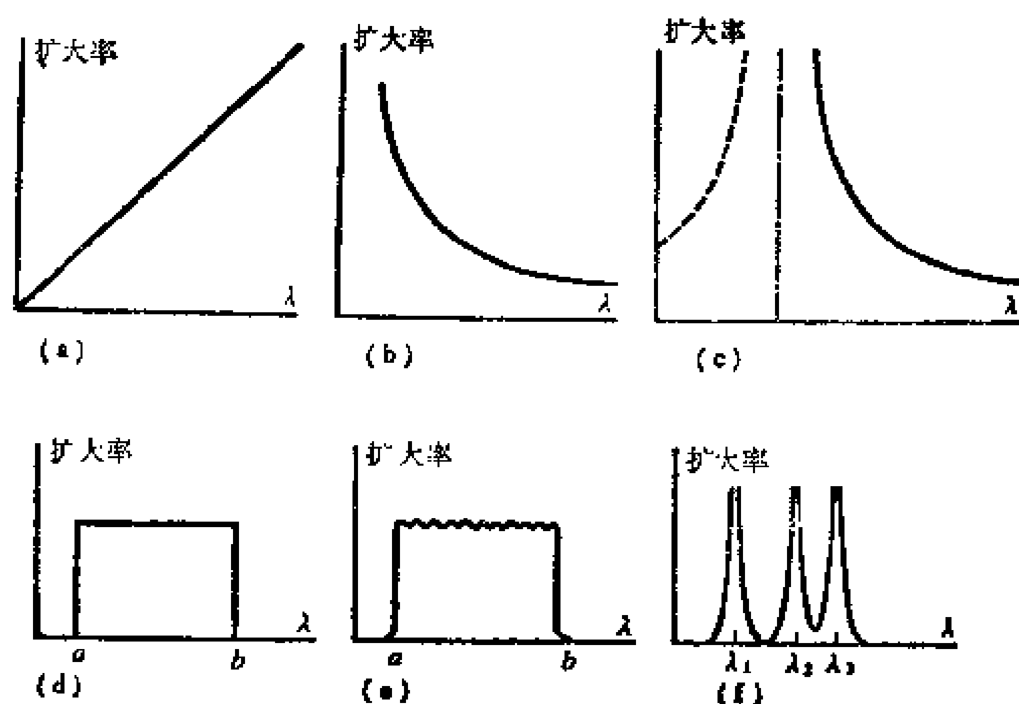


图 4.2 幂法特性比较

(a) 普通幂法（放大 λ 大的一方）；(b) 逆迭代法（放大 λ 小的一方）；(c) 带有移位的逆迭代法(特别放大移位中心附近)；(d) 理想的滤频器；(e) 切比雪夫滤频器(概念图)；(f) 多列移位法

显著放大，其它分量(相对地)急剧减小。这一方法的计算公式很多，现介绍山本、大坪公式[1)]如下：

1) 解联立方程　$AX=Z$，求 X；

2) $U=BX$；

3) $C=X^TZ$；

4) 分解 C 为　$C=R^TR$ 的形式；

5) $\bar{X}=XR^{-1}$，$\bar{Z}=ZR^{-1}$，
$\bar{U}=UR^{-1}$，$\bar{V}=VR^{-1}$；(第一次省略)

6) $\tilde{A}=I$，$\tilde{B}=\bar{X}^T\bar{U}$；

7) 解已降阶的特征值问题 $\tilde{A}q=\lambda\tilde{B}q$，

---

1) 山本善之，大坪英臣，$Ax=\lambda Bx$ に対する Chebyshev多項式により加速されたsubspace法，日本鋼構造協會第9回大会研究集會マトリックス構造解析法研究発表會論文集(1975)，pp.13—20。

$$\tilde{A}Q=\tilde{B}Q\Lambda$$

8）新 $Z=\left\{\frac{4}{b-a}\bar{U}-\frac{2(a+b)}{b-a}\bar{Z}-\bar{V}\right\}Q$，

但第一次迭代按下式进行

新 $Z=\left(\frac{2}{b-a}\bar{U}-\frac{a+b}{a-b}\bar{Z}\right)Q$；

9）$V=\bar{Z}Q$；

10）GO TO 1）.

上式中，A,B 是原特征值问题 $A\boldsymbol{x}=\lambda B\boldsymbol{x}$ 的矩阵（$n\times n$ 阶）；X 是汇集 m 列近似特征向量建立的长方形矩阵（$n\times m$）；Z 是与 X 同样形式的矩阵，在第一次迭代可适当给定；C 是 $m\times m$ 阶矩阵；R 是与 C 同阶的右上三角矩阵；$\bar{X}$，$\bar{Z}$，$\bar{U}$，$\bar{V}$ 是同 X 正交化的矩阵（$n\times m$ 阶）；$\tilde{A}$，$\tilde{B}$ 是 $m\times m$ 阶矩阵；Q 是将特征向量正规化后作为列向量排列的酉矩阵（$m\times m$）；Λ 是把相应于 Q 的特征值按对角线排列而得的对角矩阵 $m\times m$；a，b 是带域的左端点和右端点（参见图 4.2），换句话说是所求特征值的上、下限，如果 a,b 选择不当，所需要的特征值会漏掉，或者由于不需要的特征向量被放大，引起不收敛，为了恰当选择 a,b，有必要联合使用斯特姆法。

*　　*　　*

除此之外，还有各种加速收敛的方法。虽然切比雪夫滤频法具有在带域内均匀放大的优点，但同时迭代法不必要求均匀放大而可采用图 4.2（f）所示方式，使某些点放得特别大。为此，可改变 X 每一列的移位量，即不解 $A\boldsymbol{x}=Z$ 而解

$$(A-\tilde{\lambda}_1 I)\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{z}_1,\quad\cdots,\quad(A-\tilde{\lambda}_m I)\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{z}_m.$$

式中 $\boldsymbol{x}_i$ 是 X 的第 i 列．但通常不使用这一方法，而是先按 §4.5 方法预先使它五重对角化，这样，变更每一列移位量的计算量增加不多，很实用。

程序 4.6　子空间迭代法

由E，Y 取得 L 个(从小的一边算起)特征值和特征向量。XX 和 YY 是工作单元。要与程序 4.3 联合使用。

```
      SUBROUTINE KBATH(K,M,Y,XX,YY,N,L,NC,LC,DUMP,E)
      DIMENSION K(NC,NC),M(NC,NC),Y(NC,LC), XX(NC,LC), YY
      (NC,LC)
     1,AA(10,10),BB(10,10),U(10,10),E(10)
      DOUBLE PRECISION S,T
      REAL K,M
      INTEGER H
      LM1=L-1
      EPS=FLOAT(L*L)*1.0E-06
C GEN
      DO 1 I=1,N
      DO 2 J=2,L
      Y(I,J)=0.0
    2 CONTINUE
      Y(I,I)=1.0
      Y(I,1)=M(I,1)
    1 CONTINUE
C DEC
      IF(DUMP.GE.0.7) CALL PRM(K,N,N,NC,NC,1HK)
      NM1=N-1
      DO 5 I=2,N
      IM1=I-1
      IP1=I+1
      S=0.0D-40
      DO 6 H=1,IM1
      S=S+K(H,I)**2
    6 CONTINUE
      K(I,I)=K(I,I)-S
C
      DO 3 H=1,IM1
      K(H,I)=K(H,I)/K(H,H)
    3 CONTINUE
```

```
      IF(I.EQ.N) GO TO 5
      DO 7 J=IP1,N
      S=0.0D-40
      DO 8 H=1,IM1
      S=S+K(H,I)*K(H,J)
    8 CONTINUE
      K(I,J)=(K(I,J)-S)
    7 CONTINUE
    5 CONTINUE
      IF(DUMP.GE.0.7) CALL PRM(K,N,N,NC,NC,5HK,DEC)
C LOOP
      DO 100 KAISUU=1,100,10
      DO 101 KKK=1,10
C SCALE
      DO 9 J=1,L
      S=0.0
      DO 10 I=1,N
      S=S+ABS(Y(I,J))
   10 CONTINUE
      DO 9 I=1,N
      Y(I,J)=Y(I,J)/S
    9 CONTINUE
      IF (DUMP.GE.0.7) CALL PRM(Y,N,L,NC,LC,1HY)
C SOL
      DO 11 J=1,L
      XX(1,J)=Y(1,J)
   11 CONTINUE
C
      DO 12 I=2,N
      IM1=I-1
      DO 13 J=1,L
      S=0.0D-40
      DO 15 H=1,IM1
      S=S+K(H,I)*XX(H,J)
   15 CONTINUE
```